

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Донской государственный технический университет»

КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Конспект лекций
для обучающихся по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия»,
специализация «Инженерная геодезия»
заочной формы обучения

Ростов-на-Дону

2018

УДК 528.7

Космическая геодезия: конспект лекций для обучающихся по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия», специализация «Инженерная геодезия» заочной формы обучения. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2018. – 41 с.

Изложены теоретические основы использования искусственных спутников Земли для решения геодезических задач. Большое внимание уделено геодезическим системам отсчёта, приведены основы движения космических аппаратов и методы их наблюдений.

Составитель: канд. экон. наук Н.В. Самсонова

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ВРЕМЕНИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ.....	5
1.1 Понятие о пространственной прямоугольной системе координат.....	5
1.2 Преобразование пространственных прямоугольных координат..	6
1.2.1 Параллельный перенос осей координат.....	6
1.2.2 Поворот осей.....	7
1.3 Системы времени.....	10
1.4 Системы отсчета координат, принятые в космической геодезии.	13
1.5 Небесные системы координат.....	14
1.6 Земные геоцентрические системы координат.....	17
1.7 Топоцентрические системы координат.....	20
2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ.....	22
2.1 Общие положения.....	22
2.2 Невозмущенное движение спутника.....	22
2.3 Элементы орбиты спутника.....	23
2.4 Возмущенное движение ИСЗ.....	26
2.5 Возмущения, вызываемые притяжением Луны и Солнца.....	27
2.6 Давление солнечной радиации.....	27
2.7 Сопротивление атмосферы.....	28
3 МЕТОДЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ.....	29
3.1 Решение геодезических задач по наблюдениям ИСЗ.....	29
3.2 Методы наблюдений ИСЗ.....	30
3.3 Глобальные системы спутникового позиционирования.....	33
3.4 Роль спутниковых методов в геодезии.....	34
3.5 Геодинамические исследования методами космической геодезии.....	36
3.6 Моделирование движения жестких блоков земной поверхности	36
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	40

ВВЕДЕНИЕ

Космической геодезией называется раздел геодезии, в котором изучаются вопросы теории движения искусственных и естественных небесных тел для решения научных и научно-технических задач геодезии. При этом в космической геодезии используются результаты наблюдений, выполненные как с поверхности планеты, так и непосредственно со спутников.

Основными задачами космической геодезии являются:

- Определение фундаментальных постоянных, характеризующих форму, размеры и суточное вращение Земли, Луны и планет, а также изменение этих постоянных во времени;
- Определение параметров гравитационного поля Земли и планет;
- Определение (уточнение) координат пунктов в системе, отнесенных к центру масс Земли, создание единой мировой геодезической сети;
- Определение в пространственной геодезической системе координат (с началом в центре масс Земли) положения центра референц-эллипсоида;
- Установление связи между различными геодезическими системами.

Космическая геодезия решает также ряд прикладных задач:

- Координатно-временную привязку результатов космических съемок Земли и планет, выполняемых при исследовании природных ресурсов и космического картографирования;
- Установление характера и особенностей движения материков, закономерности протекания тектонических процессов, и т.п.

Космическая геодезия тесно связана с небесной механикой, астрономией, математикой, физикой и другими дисциплинами.

Бурное развитие космической геодезии связано с запуском первого искусственного спутника Земли (ИСЗ) 4 октября 1957 г., а также с последующими запусками космических объектов и спутниковых систем, позволяющих эффективно решать традиционные и новые задачи геодезии.

Существует три основных метода космической геодезии: геометрический, динамический и орбитальный.

Геометрический метод служит для передачи координат на большие расстояния. Он основан на синхронном наблюдении ИСЗ с нескольких пунктов земной поверхности. Здесь небесное тело используется как высоко поднятая визирная цель. Используя синхронные наблюдения, решаются различного рода пространственные засечки для определения координат неизвестных пунктов.

Динамический метод, в противоположность геометрическому методу, основан на использовании теории движения искусственного спутника Земли

по орбите. Для реализации динамического метода необходимо иметь модель движения ИСЗ.

Динамический метод предполагает совместное определение координат наземных пунктов, элементов орбиты ИСЗ, а также уточнение параметров модели возмущающих сил действующих на спутник. Реализация динамического метода космической геодезии требует наличия совершенных алгоритмов и гигантских комплексов программ для самых современных компьютеров, на разработку которых необходимы большие затраты труда целых коллективов квалифицированных математиков и программистов.

Орбитальный метод является частным случаем динамического, в котором параметры модели возмущающих сил, действующих на ИСЗ, построены с необходимой точностью и не уточняются в процессе решения. В орбитальном методе на основе наблюдений, выполненных на наземных пунктах или непосредственно со спутника, совместно определяются координаты пунктов и элементы орбит.

Если положить, что элементы орбиты на момент измерений известны, то определяемыми величинами будут только координаты пунктов, которые определяются путем решения обратных пространственных засечек. Эта процедура получила название упрощенного орбитального метода и применяется при решении навигационных задач.

1 СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ВРЕМЕНИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

1.1 Понятие о пространственной прямоугольной системе координат

Положение точки в трехмерном пространстве может быть определено в пространственной системе координат. Если через некоторую точку O пространства (рис. 1.1) провести три взаимно перпендикулярные оси OX , OY , OZ – соответственно: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат, то относительно этих осей можно определить положение точки в пространстве.

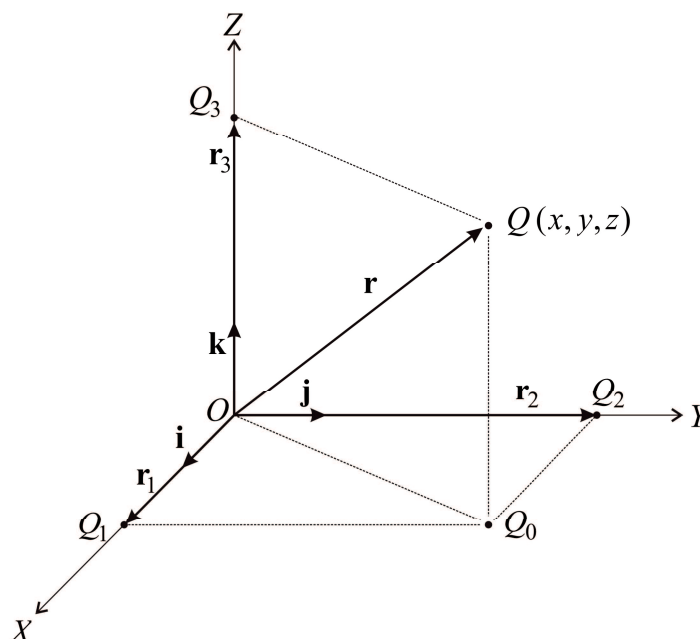


Рисунок 1.1 – Система пространственных прямоугольных координат

Пусть в принятой системе координат задан вектор \mathbf{r} , начало которого совпадает с началом координатной системы, а конец – с точкой $Q(x, y, z)$, имеющей координаты x, y, z .

Согласно правилу сложения векторов можно написать

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3. \quad (1.1)$$

Это равенство показывает, что всякий вектор можно разложить на составляющие, лежащие на осях координат. Слагаемые векторы \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_3 называются компонентами или составляющими данного вектора \mathbf{r} относительно системы координат $OXYZ$. Отложив в положительном направлении каждой из осей координат (рис 1.1) по вектору \mathbf{i}, \mathbf{j} и \mathbf{k} , длины которых равны единице, получим

$$\mathbf{r}_1 = x\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_2 = y\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_3 = z\mathbf{k}.$$

Таким образом, рассматривая проекции x, y, z вектора \mathbf{r} на оси координат, на основании (1.1), имеем

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1.2)$$

или

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Длина (модуль) вектора \mathbf{r} определяется выражением

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Так как выбор начала системы координат и положительных направлений их осей произволен, то можно говорить о многообразии пространственных прямоугольных систем координат. Поэтому на практике нередко возникает необходимость в преобразовании одной системы прямоугольных координат в другую.

1.2 Преобразование пространственных прямоугольных координат

1.2.1 Параллельный перенос осей координат

Пусть x_1, y_1, z_1 – координаты произвольной точки Q относительно пространственной прямоугольной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$, а x_2, y_2, z_2 – координаты той же точки относительно координатной системы $O_2X_2Y_2Z_2$. Обозначим через $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – координаты начала системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ в системе $O_1X_1Y_1Z_1$.

Если единицы масштаба по осям обозначенных систем координат совпадают, то согласно рис. 1.2 можно написать

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 - \Delta\mathbf{r} \end{aligned} \right\}, \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}.$$

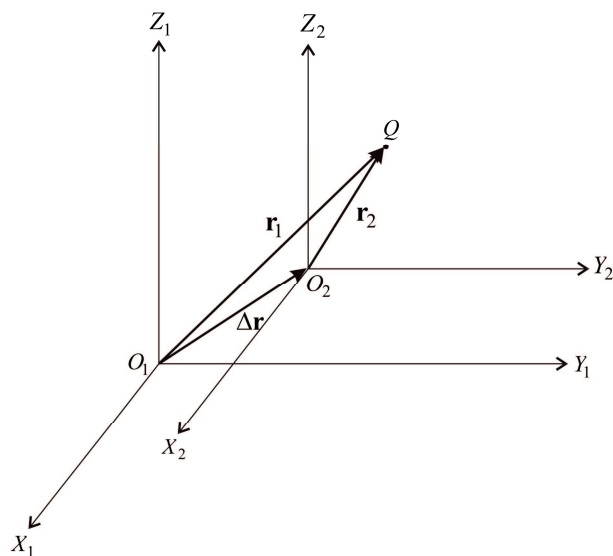


Рисунок 1.2 – Параллельный перенос осей координат

1.2.2 Поворот осей

Вектор \mathbf{r} (рис. 1.3) может быть выражен в виде функции, как первой $O_1X_1Y_1Z_1$, так и второй $O_2X_2Y_2Z_2$ систем координат

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1 = x_2 \mathbf{i}_2 + y_2 \mathbf{j}_2 + z_2 \mathbf{k}_2. \quad (1.5)$$

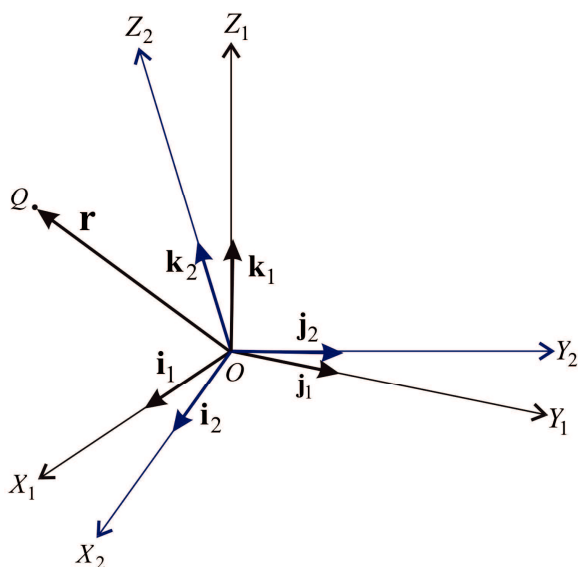


Рисунок 1.3 – Разворот осей пространственной системы координат

Умножая скалярно, левые и правые части выражения (1.5) последовательно на орты $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1 \in \mathbf{k}_1$, имеем

$$\begin{aligned} x_1(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1) + y_1(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_1) + z_1(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_1) &= x_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2), \\ x_1(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_1) + y_1(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_1) + z_1(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_1) &= x_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2), \\ x_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_1) + y_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_1) + z_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_1) &= x_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2). \end{aligned}$$

Известно, что скалярные произведения ортогональных векторов равны нулю, а одноименных векторов – единице, т.е.:

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_1) &= (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_1) = (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_1) = 0; \\ (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1) &= (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_1) = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_1) = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2), \\ y_1 &= x_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2), \\ z_1 &= x_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2), \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{P} \mathbf{r}_2, \quad (1.6)$$

где

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2) & (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2) & (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \\ (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2) & (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2) & (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \\ (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2) & (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2) & (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что скалярное произведение двух единичных векторов равно косинусу угла между этими векторами. Поэтому выражение для матрицы \mathbf{P} (матрица преобразований) можно представить в виде

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) & \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2) & \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{k}_2) \\ \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{i}_2) & \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) & \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{k}_2) \\ \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{i}_2) & \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{j}_2) & \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть в двух системах координат начало и оси абсцисс совпадают, а оси ординат и аппликат лежат в плоскости $O_1Y_1Z_1$ и отстоят друг от друга на угол μ соответственно (рис. 1.4.а).

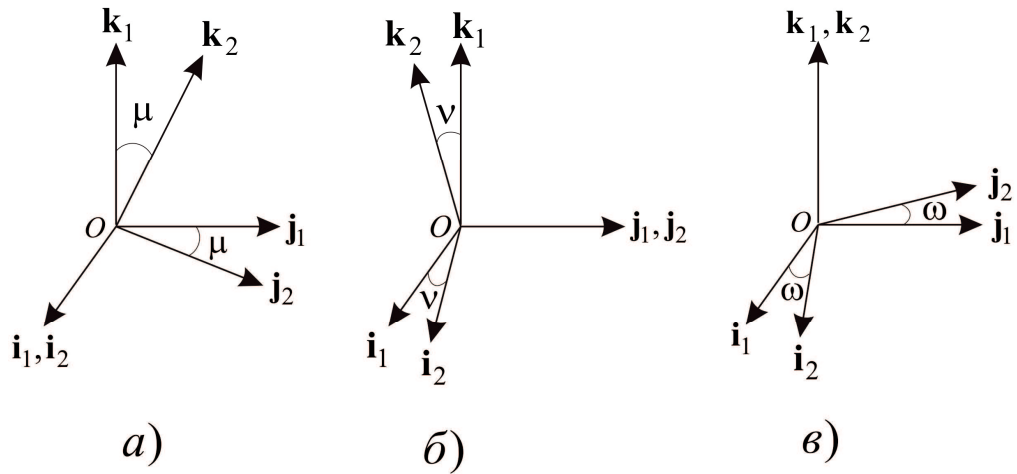


Рисунок 1.4 – Частные случаи преобразования систем координат

Имеем

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) &= \cos(0^\circ) = 1, \\ \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2) &= \cos(\mathbf{i}_1, \mathbf{k}_2) = \cos(270^\circ) = 0, \\ \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{i}_2) &= \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{i}_2) = \cos(90^\circ) = 0, \\ \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &= \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \cos(\mu), \\ \cos(\mathbf{j}_1, \mathbf{k}_2) &= \cos(270^\circ + \mu) = \sin(\mu), \\ \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{j}_2) &= \cos(90^\circ + \mu) = \sin(-\mu) = -\sin(\mu).\end{aligned}$$

Теперь матрица преобразований \mathbf{P} примет вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_X(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\mu) & \sin(\mu) \\ 0 & -\sin(\mu) & \cos(\mu) \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

По аналогии, когда оси ординат (рис. 1.4.б) и аппликат (рис. 1.4.в) двух координатных систем совпадают, можно написать

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_Y(\nu) = \begin{bmatrix} \cos(\nu) & 0 & -\sin(\nu) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\nu) & 0 & \cos(\nu) \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_Z(\omega) = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) & 0 \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Матрицу $\mathbf{P}_u(\beta)$, где $u = X, Y, Z$; $\beta = \mu, \nu, \omega$, называют *матрицей поворота* или *матрицей вращения*. Матрица $\mathbf{P}_u(\beta)$ – ортогональная матрица, определитель которой равен единице. Для нее справедливы соотношения:

$$\mathbf{P}_u^{-1}(\beta) = \mathbf{P}_u^T(\beta) = \mathbf{P}_u(-\beta).$$

Выражения (1.8) – (1.10) соответствуют правой системе координат и положительным углам поворота при вращении против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения (u) по направлению к началу координат.

1.3 Системы времени

В космической геодезии рассматривают два аспекта времени: эпоха и интервал. Эпоха определяет момент события, а интервал – время, протекшее между двумя эпохами.

Обычно эпоха фиксируется днем, месяцем, годом (*григорианский стиль*). Однако, вычитание более ранней даты одного события из более поздней даты может представить некоторые неудобства и дать неуверенность в результате. Поэтому задача о числе суток, прошедших между двумя заданными датами удобнее решается с помощью *юлианского периода*.

Юлианский период – это система счета времени в сутках, предложенная в 1583 году французским ученым Ж. Скалигером для хронологических расчетов. Удобство юлианского периода заключается в том, что все дни в нем занумерованы по порядку, независимо от принятой календарной системы, номера года, месяца, недели. В хронологии юлианский период дает возможность связывать различные календарные эпохи, выражая их через дни юлианского периода – *юлианские дни*.

Началом каждого юлианского дня считается средний гринвичский полдень. В астрономических ежегодниках или в специальных таблицах даются целые числа юлианских дней, прошедших с начала счета до среднего гринвичского полудня определенной даты. Для перехода к средней гринвичской полночи от полученной даты следует отнять 0,5.

Юлианская дата (JD), соответствующая рассматриваемому моменту времени, может быть также вычислена по формуле

$$JD = 1721013,5 + 367g - \text{entier}\left\{\frac{7}{4}\left[g + \text{entier}\left(\frac{m+9}{12}\right)\right]\right\} + \text{entier}\left(\frac{275}{9}m\right) + d,$$

где *entier* – целая часть значения алгебраического выражения; *g* – номер года; *m* – номер месяца в году; *d* – номер дня в месяце.

При решении задач космической геодезии время выполняет две функции:

1. Показывает угол поворота земной системы координат относительно небесной;
2. Выступает в качестве независимой переменной в уравнениях движения небесных тел.

В соответствии с решаемыми задачами, применяются два типа систем времени: *астрономические* и *атомные*.

Системы астрономического времени основаны на суточном вращении Земли. Эталоном для построения шкал астрономического времени служат солнечные или звездные сутки. *Истинным звездным временем *s** называется часовой угол истинной точки весеннего равноденствия (рис 1.5).

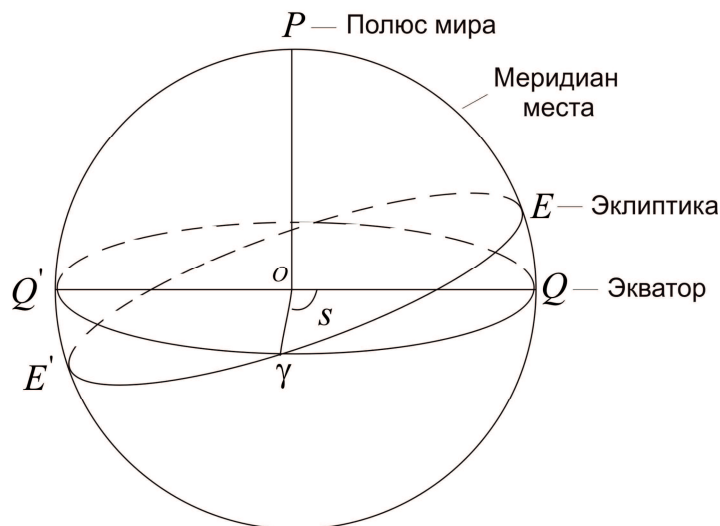


Рисунок 1.5 – Истинное звездное время

Местное звездное время *s* приводится к меридиану Гринвича:

$$S = s - \lambda,$$

где *S* – Гринвичское истинное звездное время, *λ* – астрономическая долгота наблюдательного пункта.

Среднее звездное время *S*₀ отличается от истинного звездного времени на величину полной нутации по прямому восхождению *N*_α:

$$S_0 = S - N_\alpha.$$

Гринвичское среднее звездное время \tilde{S}_0 в полночь по всемирному времени определяется из выражения

$$\tilde{S}_0 = 6^h 41^m 50,54841^s + 8640184,812866^s \Delta T + 0,093104^s \Delta T^2 + 6,2 \cdot 10^{-6} \Delta T^3,$$

где

$\Delta T = \frac{JD - 2451545,0}{36525}$ – промежуток времени, измеряемый в юлианских столетиях между фундаментальной эпохой 2000,0 ($JD = 2451545,0$) и рассматриваемым моментом (JD).

Среднее солнечное время, прошедшее от полночи до текущего момента называется *всемирным временем* и обозначается как $UT0$:

$$UT0 = (S_0 - \tilde{S}_0) - \nu(S_0 - \tilde{S}_0).$$

Здесь $\nu = 0,0027304336$ – коэффициент перехода от звездного времени к среднему солнечному. Время $UT0$ определяется из наблюдений на обсерваториях международной службы вращения Земли (МСВЗ).

После исключения из $UT0$ влияния движения полюса Земли на долготу обсерватории, получается всемирное время $UT1$:

$$UT1 = UT0 - \Delta\lambda_p.$$

Время $UT1$ можно интерпретировать как угол между начальным меридианом счета долгот и средним экваториальным Солнцем – фиктивной точкой, равномерно движущейся по экватору.

Связь между гринвичским звездным временем \tilde{S}_0 в среднюю гринвичскую полночь, гринвичским истинным звездным временем S и всемирным временем $UT1$ устанавливается формулой

$$S = \tilde{S}_0 + N_\alpha + (1 + \nu)UT1$$

Из-за неравномерности вращения Земли и постоянно возрастающих запросов науки и техники было введена шкала атомного времени TAI , не зависящее от вращения и движения Земли. За единицу атомного времени принята секунда, которая равна 9 192 631 770 периодам колебаний излучения, соответствующего периоду между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия -133. Точность атомных часов порядка 10^{-12} . Стабильность частоты современных квантовых генераторов на атомном водороде достигает $5 \cdot 10^{-14}$. В бюллетенях «Всемирное время и координаты полюса» (Серия E) регулярно публикуются значения разностей $UT1-TAI$.

1.4 Системы отсчета координат, принятые в космической геодезии

Под системами отсчета понимают совокупность систем координат и систем измерения времени.

Координаты – это величины, определяющие положение любой точки на поверхности Земли или в пространстве относительно принятой системы координат.

Система координат устанавливает начало отсчета координат, ориентировку в пространстве основной координатной плоскости, направление осей координат.

В космической геодезии используются различные системы координат. Так при вычислении орбит спутников, прогнозирования их движения используются одни системы координат, для определения координат пунктов наблюдений используются другие системы, а для использования полученных координат при решении различных прикладных задач требуются совершенно иные системы.

Система координат, начало которой находится в центре планетарного тела, называется планетоцентрической (например, *гелиоцентрической*, *луноцентрической*, *геоцентрической* с началом в центре масс Солнца, Луны, Земли соответственно). Система координат, начало которой совпадает с точкой наблюдения на поверхности Земли, называется *топоцентрической*.

В зависимости от выбранной основной координатной плоскости различают *экваториальную*, *эклиптическую* (плоскость эклиптики), *горизонтную* (плоскость местного горизонта) и *орбитальную* (плоскость орбиты небесного объекта) системы координат.

Направления осей системы координат задаются относительно некоторых точек небесной сферы или земной поверхности.

По направлению осей координат относительно точек пространства системы координат делятся на *звездные (небесные)* и *земные* (оси координат ориентированы соответственно относительно звезд или точек на земной поверхности).

Направление координатных осей можно задавать относительно *фундаментальных векторов*. К этим векторам относят вектор кинетического момента Земли, направления мгновенной оси её вращения, вектор направления силы тяжести, нормаль к орбите Земли (к эклиптике), вектор линии узлов земной орбиты (направление натеку весеннего равноденствия) и др. Координаты, связанные с отвесной линией, называют *астрономическими*.

В каждой системе положение точки может быть представлено в форме *прямоугольных (декартовых)* или *сферических* координат, а для систем, связанных с эллипсоидами, – также в форме *геодезических (сфероидических, или эллипсоидальных, или криволинейных)* координат.

Из-за прецессии и нутации оси вращения Земли основные плоскости и оси координат с течением времени изменяют положение и направление в пространстве. Поэтому планетарные координаты фиксируют на

определенную эпоху. Координаты, связанные с положением оси вращения Земли на момент наблюдения, называются *мгновенными*, или *истинными*.

Вследствие того, что выбранные для ориентировки координатных систем точки могут изменять свое положение, обязательно учитывается *эпоха* – тот момент времени, к которому относятся направление осей.

1.5 Небесные системы координат

В космической геодезии для определения положения небесных объектов часто используют небесную (звездную) систему координат. Такая система задается следующим образом (рис. 1.6):

- начало O расположено в центре масс Земли;
- ось Z совпадает с мгновенной осью вращения Земли по направлению к истинному северному полюсу P ;
- ось X лежит в экваториальной плоскости QoQ' и направлена к истинной точке весеннего равноденствия γ (точке пересечения плоскости истинного экватора Земли с орбитой Земли $E\gamma E'$, наклоненной к экватору на угол ε ;
- ось Y лежит в плоскости QoQ' и дополняет систему до правой.

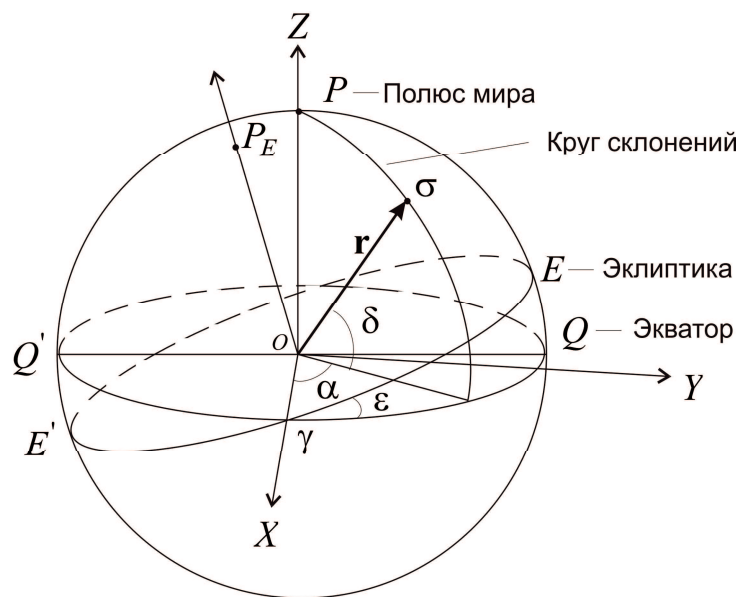


Рисунок 1.6 – Небесная система координат

В этой системе координат вектор \mathbf{r} определяет положение небесного объекта σ . Компоненты вектора \mathbf{r} могут быть заданы либо прямоугольными координатами x, y, z , либо сферическими координатами r, α, δ . Здесь r – расстояние от начала системы координат до небесного светила; α, δ – прямое восхождение и склонение объекта наблюдений соответственно.

Прямое восхождение – это угол в экваториальной плоскости, измеренный против часовой стрелки от точки весеннего равноденствия до круга склонений. Склонение объекта – это острый угол, измеряемый от плоскости экватора до светила.

Прямоугольные и сферические координаты точки связаны соотношениями:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix}; \quad \alpha = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) = \arctg\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right); \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Описанная система координат называется *истинной небесной системой*. Истинная небесная система не является строго инерциальной. Ориентировка ее осей изменяется со временем в пространстве из-за лунно-солнечной прецессии и астрономической нутации земной оси. При этом истинный полюс P совершает вековое и колебательное движение вокруг полюса эклиптики P_E .

Причина прецессии и нутации лежит в постоянно изменяющемся гравитационном притяжении Солнцем и Луной (в меньшей степени – планет) элементов масс Земли. Это происходит вследствие орбитального движения Земли и Луны.

Гравитационное притяжение несферической Земли Солнцем и Луной заставляет Землю колебаться в пространстве подобно волчку и при этом испытывать малые наклоны, называемые нутацией (рис. 1.7).

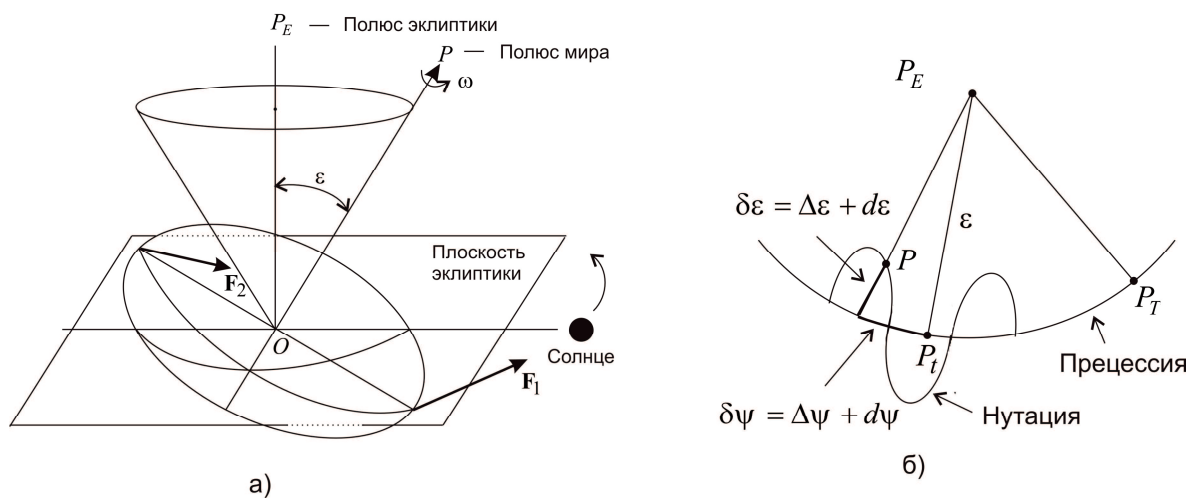


Рисунок 1.7 – Прецессия и нутация

Если в положении истинного полюса P учесть влияние нутации в данную эпоху t , то получится положение среднего полюса P_t на эту эпоху. Ему соответствует плоскость среднего небесного экватора Q_tOA_t и средняя точка весеннего равноденствия γ_t (рис. 1.8).

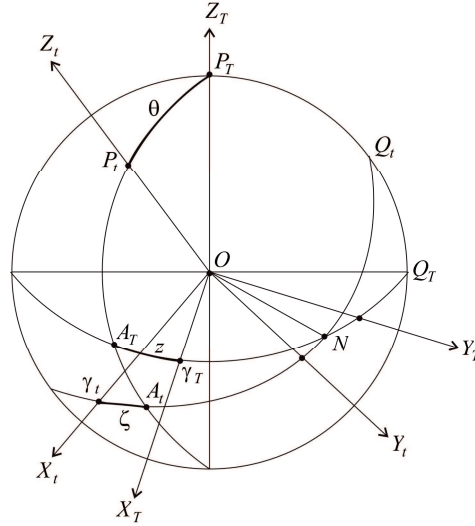


Рисунок 1.8 – Прецессионные углы

Такая система называется *средней небесной системой* в эпоху t .

Положение основной плоскости Q_TOA_T и направление координатных осей X_T, Y_T, Z_T в пространстве для эпохи T , называемой фундаментальной эпохой, задаваемой обычно на начало Юлианского года $J2000.0$, закрепляется в каталогах координатами α_T, δ_T звезд или других небесных объектов.

Связь между средними координатами x_t, y_t, z_t объекта на эпоху наблюдений t и средними координатами x_T, y_T, z_T фундаментальной эпохи T осуществляется с помощью прецессионных параметров ζ, z и θ (см. рис. 1.8) путем трех последовательных вращений: на угол z в плоскости OX_TY_T , на угол θ в плоскости OA_TZ_T и на угол ζ в плоскости OA_tQ_t . В результате имеем

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z(\zeta) \mathbf{P}_Y(-\theta) \mathbf{P}_Z(z) \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_Z(\zeta) \mathbf{P}_Y(-\theta) \mathbf{P}_Z(z).$$

Углы прецессии ζ, θ и z , выраженные в угловых секундах, вычисляются по формулам Ньюкома-Андуайе. С точностью до членов третьего порядка они представляются так

$$\begin{aligned}\zeta &= 2306.2181'' \Delta T + 0.30188'' \Delta T^2 + 0.017998'' \Delta T^3; \\ \theta &= 2004.3109'' \Delta T + 0.42665'' \Delta T^2 + 0.041833'' \Delta T^3; \\ z &= 2306.2181'' \Delta T + 1.09468'' \Delta T^2 + 0.018203'' \Delta T^3.\end{aligned}$$

Переход от средних координат x_t, y_t, z_t в эпоху t к истинным координатам x, y, z этой же эпохи выполняется через матрицу нутации \mathbf{N} :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}_X(-\varepsilon_t - \delta\varepsilon) \mathbf{P}_Z(-\delta\psi) \mathbf{P}_Z(\varepsilon_t),$$

ε_t – средней наклон эклиптики к экватору,

$\delta\varepsilon = \Delta\varepsilon + d\varepsilon$ – коротко и долгопериодическая нутация наклона эклиптики,

$\delta\psi = \Delta\psi + d\psi$ – коротко и долгопериодическая нутация по долготе.

Средний наклон эклиптики к экватору определяется соотношением

$$\varepsilon_t = 23^\circ 26' 21.448'' - 46.8150'' \Delta T - 0.00059'' \Delta T^2 + 0.001813'' \Delta T^3.$$

Полный переход от средних координат наблюдаемого объекта фундаментальной эпохи T к истинным координатам имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix}.$$

1.6 Земные геоцентрические системы координат

В земных геоцентрических системах координат началом является центр масс Земли, а направление осей связано с положением полюса Земли, ее экватора и начального меридиана. Эти системы вращаются вместе с Землей при ее суточном движении в пространстве. В таких системах положение

(координаты) точек на земной поверхности подвергаются только малым изменениям со временем из-за геофизических эффектов (тектонические и приливные деформации), которые можно достаточно точно учитывать.

Общеземная геоцентрическая прямоугольная система координат определяется следующим образом (рис. 1.9):

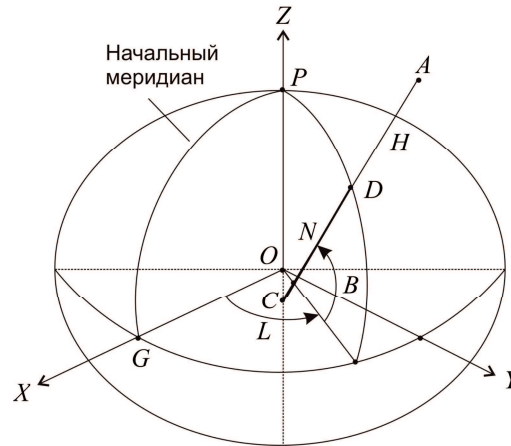


Рисунок 1.9 – Геоцентрическая земная система координат

- Начало системы координат (точка O) находится в центре масс Земли;
- Ось Z проходит через полюс (точка P);
- Ось X проходит через точку G пересечения плоскости экватора и начального меридиана;
- Ось Z находится в экваториальной плоскости и дополняет систему до правой системы координат.

Все геоцентрические системы связаны с определенными эллипсоидами, названия которых обычно совпадает с названием самой системы. В этом случае возможно использование не только декартовых, но и эллипсоидальных (сфероидических) координат: геодезической широты B , геодезической долготы L и высоты H точки A над эллипсоидом (отрезок \overline{DA}).

Геодезическая широта (B) это острый угол между плоскостью экватора и нормалью к поверхности эллипсоида. *Геодезической долготой* называют двугранный угол между плоскостями начального меридиана и меридиана заданной точки.

Связь геодезических координат с прямоугольными координатами осуществляется по формулам:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + H) \cos B \cos L \\ (N + H) \cos B \sin L \\ [N(1 - e^2) + H] \sin B \end{bmatrix},$$

где N – радиус кривизны первого вертикала (отрезок \overline{CD}), определяемый как

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$$

Здесь a – большая полуось земного эллипсоида, e^2 – квадрат первого эксцентриситета.

В земной системе координат положение оси вращения Земли, ее полюса и экватора, а также начального меридиана связано с проблемой движения полюса.

По многолетним измерениям геодезических широт в различных пунктах Земли было замечено, что широты пунктов не остаются постоянными, а периодически меняются. Эти колебания широт объясняются тем, что тело Земли смещается относительно оси вращения и в разное время с полюсами вращения совпадают различные точки поверхности Земли. Таким образом, положение полюса Земли является функцией времени.

Для детального изучения явления движения полюса организована *Международная служба вращения Земли* (МСВЗ). Одна из задач МСВЗ это установление координат x_p и y_p мгновенного полюса Земли относительно осредненного за период с 1900 г. по 1905 г. *условного земного полюса* (УЗП). Ось x_p направлена по начальному меридиану, а ось y_p – под углом 90° на запад (рис. 1.10). Средние квадратические погрешности определения x_p и y_p по данным МСВЗ составляет $0.0003''$ (~ 1 см).

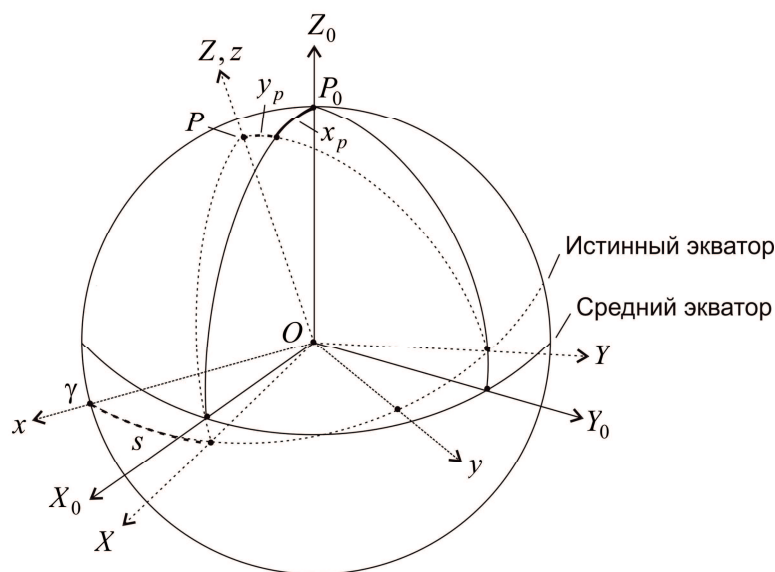


Рисунок 1.10 – Связь между истинной небесной и общеземной системами координат

Связь земных с небесными координатами возможна только через мгновенные земные (X, Y, Z) и истинные небесные (x, y, z) системы. Согласно рис. 1.10, имеем

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z(-s) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

где s – истинное звездное время.

Если координаты точки (X_0, Y_0, Z_0) на земной поверхности заданы относительно условного земного полюса P_0 , то справедливо соотношение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z(-s) \mathbf{P}_Y(x_p) \mathbf{P}_X(y_p) \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}.$$

В силу ортогональности матриц вращения, обратная связь средней земной и истинной небесной систем координат имеет вид:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_X(-y_p) \mathbf{P}_Y(-x_p) \mathbf{P}_Z(s) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

1.7 Топоцентрические системы координат

Очень часто при построении геодезических сетей методами космической геодезии применяются топоцентрические системы координат, начало которых расположено в точке наблюдений A на земной поверхности. Если направления осей топоцентрической системы (X', Y', Z') параллельны осям (X, Y, Z) общеземной системы, то такая система называется *топоцентрической земной системой координат* (рис.1.11).

Связь этих двух систем осуществляется переносом начала координат из точки O в точку A и наоборот:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix},$$

где

X_A, Y_A, Z_A – координаты пункта A на поверхности Земли.

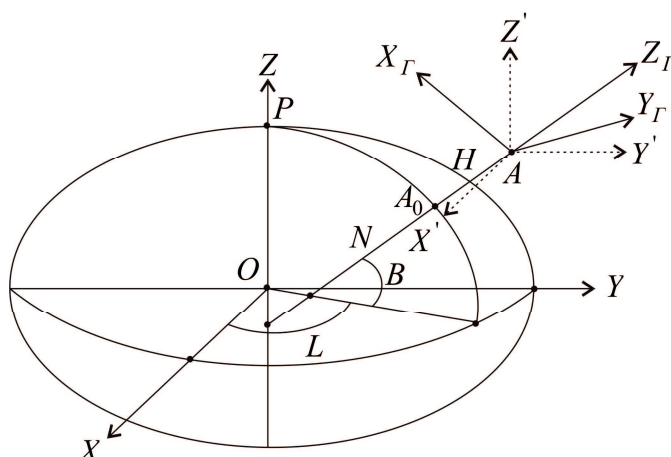


Рисунок 1.11 – Топоцентрические системы координат

Если основная плоскость топоцентрической системы координат совпадает с плоскостью геодезического горизонта, ось Z_G направлена в геодезический зенит пункта, ось X_G – на север, а ось Y_G – на восток, то такая система называется *топоцентрической горизонтной системой координат*. Связь координат X', Y', Z' с горизонтными X_G, Y_G, Z_G определяется формулой:

$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} = \mathbf{P}_X(90 - B) \mathbf{P}_Z(90 + L) \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}.$$

Сферическими координатами наблюдаемого пункта в этой системе являются его геодезический азимут A , зенитное расстояние z и расстояние ρ до наблюдаемого объекта. Связь сферических координат с прямоугольными координатами выполняется по формулам

$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \sin z \cos A \\ \rho \sin z \sin A \\ \rho \cos z \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sqrt{X_G^2 + Y_G^2}}{Z_G}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{Y_G}{X_G}, \quad \rho = \sqrt{X_G^2 + Y_G^2 + Z_G^2}.$$

2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

2.1 Общие положения

Траектория, по которой движется в полете искусственный спутник Земли (ИСЗ) называется орбитой. Орбитальное движение спутников происходит в гравитационном поле Земли. Однако помимо сил притяжения Земли на ИСЗ действуют и другие силы, такие как, притяжение Солнца и Луны, давление солнечной радиации, торможение в атмосфере, другие геофизические эффекты.

Математически уравнения движения спутника выражаются дифференциальными уравнениями второго порядка, которые решаются во времени. При интегрировании задаются начальные условия движения в виде векторов положения и скорости в начальную эпоху. Рассчитанные на некоторое время вперед, положения спутников можно сравнить с положением, полученным из наблюдений. Расхождения между этими положениями используются для уточнения моделей действующих на спутник сил и координат станций наблюдений.

2.2 Невозмущенное движение спутника

Будем считать, что на движение ИСЗ не влияют никакие другие силы, кроме притяжения Земли. При этом Землю представим шаром с массой M со сферически симметричным распределением плотности. При таких условиях движение спутника называют невозмущенным, подчиняющимся действию трем законам Кеплера:

1. Спутник движется по эллипсу, в одном из фокусов которого располагается центр масс Земли;
2. Радиус-вектор спутника за равные промежутки времени описывает равные площади;
3. Отношение квадрата периода обращения спутника к кубу большой полуоси его орбиты есть величина постоянная.

Вывод дифференциальных уравнений движения ИСЗ основан на трех законах Ньютона и законе всемирного тяготения, согласно которому все тела притягиваются друг к другу с силой F , прямо пропорциональной произведению их масс M и m и обратно пропорциональной квадрату расстояния r^2 между ними, т.е.

$$F = \frac{fMm}{r^2}, \quad (2.1)$$

где f – постоянная тяготения.

Формула (2.1) позволяет определить силу взаимодействия между двумя точечными телами, однородными шарами или шарами с равномерным распределением масс по концентрическим сферам. Гравитационные поля этих тел называют *центральными*. В первом приближении гравитационное поле Земли можно считать центральным. В этом случае на ИСЗ действует сила, направленная к центру масс Земли, а спутник согласно второму закону Ньютона получает ускорение a

$$a = \frac{F}{m},$$

Тогда, с учетом (2.1), имеем ускорение

$$a = \frac{fM}{r^2}, \quad (2.2)$$

которое не зависит от массы спутника m .

Произведение $fM = \mu$ определено точнее, чем каждый из сомножителей и получило название *геоцентрической гравитационной постоянной*, которая относится к числу фундаментальных постоянных.

В инерциальной системе координат $Oxyz$ (истинная небесная система координат) положение спутника задается радиус-вектором \mathbf{r} , скорость – вектором \mathbf{V} , а ускорение – вектором \mathbf{a} :

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Дифференциальные уравнения (2.4) описывает *невозмущенное*, или *Кеплерово*, движение. Оно имеет шесть независимых постоянных интегрирования, которые позволяют на любой момент вычислить положение и скорость спутника $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.

2.3 Элементы орбиты спутника

От постоянных интегрирования уравнений движения обычно переходят к другим постоянным параметрам, по которым можно вычислить координаты и скорости спутника на любой момент времени. Их называют элементами орбиты. По своему назначению элементы орбиты делятся на три группы.

К первой группе относят элементы, характеризующие размер и форму орбиты. Это большая a и малая b полуоси орбитального эллипса (рис. 2.1).

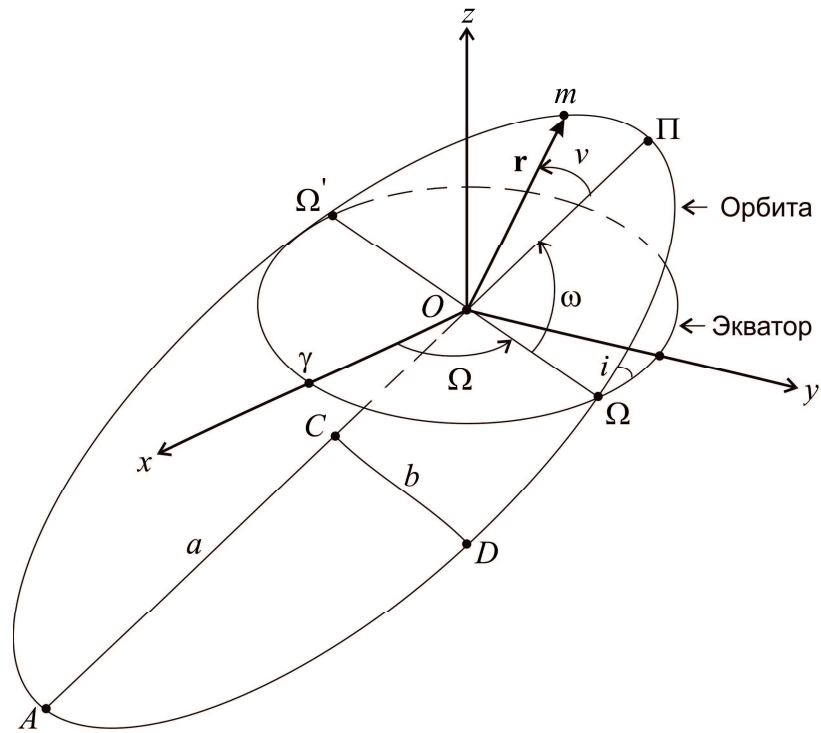


Рисунок 2.1 – Элементы орбиты ИСЗ

К этой же группе элементов орбиты относятся: эксцентриситет орбиты e , фокальный параметр p , радиусы орбиты спутника в перигее r_{Π} и апогее r_A , среднее движение n и период обращения P :

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \quad p = a(1 - e^2), \quad r_{\Pi} = \frac{p}{1 + e}, \quad r_A = \frac{p}{1 - e}, \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad P = \frac{2\pi}{n}. \quad (2.4)$$

При этом, периодом обращения спутника P вокруг центрального тела называется промежуток времени между моментами двух последовательных прохождений через произвольную точку орбиты. Среднее движение n интерпретируется как средняя угловая скорость движения спутника.

В зависимости от величины эксцентриситета, различают орбиты в виде окружности ($e = 0$), эллипса ($0 < e < 1$), параболы ($e = 1$), гиперболы ($e > 1$) и прямой ($e = \infty$). В дальнейшем мы будем рассматривать только эллиптические орбиты.

Элементы второй группы задают ориентировку орбиты в пространстве. К ним относятся (см. рис. 2.1): *наклонение* i (угол между плоскостью экватора и плоскостью орбиты); *долгота восходящего узла* Ω (угол, лежащий в плоскости экватора, отсчитываемый от направления на точку весеннего равноденствия γ до направления на восходящий узел орбиты Ω) и *аргумент перигея* ω (угол, лежащий в плоскости орбиты между направлениями на восходящий узел Ω и перигей Π , отсчитываемый по направлению движения спутника).

Элементы третьей группы задают положение спутника на орбите. Это истинная ν и средняя M аномалии. Истинной аномалией ν называется угол между направлениями на перигей Π и спутник m . Средняя аномалия M представляет собой угол от направления на перигей до направления на некоторое фиктивное положение спутника, движущегося равномерно по орбите:

$$M = n(t - t_{\pi}). \quad (2.5)$$

Здесь t_{π} – момент прохождения перигея.

Для связи истинной ν и средней M аномалий вводится *эксцентрисическая аномалия* E . Эта связь определяется соотношениями:

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}; \quad M = E - e \sin E. \quad (2.6)$$

Часто используется угол, отсчитанный от направления на восходящий угол орбиты до направления на спутник, называемый *аргументом широты* u ($u = \omega + \nu$).

Согласно 1-му закону Кеплера (движение спутника вокруг притягивающего тела происходит по коническому сечению, в одном из фокусов которого находится притягивающий центр) справедливо соотношение для расстояния r от центра масс притягивающего тела до спутника:

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{p}{1 + e \cos \nu}. \quad (2.7)$$

Связь элементов орбиты с инерциальной (небесной) системой координат осуществляется по формуле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z(-\Omega) \mathbf{P}_X(-i) \begin{bmatrix} r \cos u \\ r \sin u \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Вектор скорости спутника \mathbf{V} , направленный по касательной к орбите, раскладывается на две составляющие: вектор радиальной скорости \mathbf{V}_r , направленный вдоль радиус-вектора спутника и вектор трансверсальной скорости \mathbf{V}_n , направленный в плоскости орбиты перпендикулярно к радиус-вектору. Модули этих скоростей находятся по формулам:

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v; \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v). \quad (2.9)$$

Тогда вектор скорости определяется как

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z(-\Omega) \mathbf{P}_X(-i) \begin{bmatrix} V_r \cos u - V_n \sin u \\ V_r \sin u + V_n \cos u \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

2.4 Возмущенное движение ИСЗ

Движение ИСЗ вокруг Земли только в первом приближении происходит в соответствии с законами Кеплера. На спутник кроме центральной действуют другие силы разной физической природы, поэтому движение ИСЗ отличается от невозмущенного (Кеплерова) движения. Реальное движение спутника называется *возмущенным*, а его орбиту – *возмущенной орбитой*. Разности между элементами возмущенной и невозмущенной орбиты в один и тот же момент времени называется *возмущениями*.

Возмущения в дифференциальных уравнениях возмущенного движения, выраженные в виде возмущающих ускорений, имеют вид

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.11)$$

Решение этих уравнений в квадратурах для реальных условий возможно лишь для некоторых частных случаев. При этом используются различные модели движения, позволяющие добиться решения с достаточной точностью. Замена реальных сил на модельные силы, позволяющие интегрировать, приводит к понятию промежуточной орбиты. При изучении возмущенного движения используется принцип Лагранжа, согласно которому возмущенное движение спутника происходит по орбите, элементы которой изменяются со временем. Это означает, что в каждый момент времени возмущающая орбита совпадает с некоторой орбитой, имеющей с ней общий радиус вектор \mathbf{r} и вектор скорости \mathbf{V} . Такие орбиты называют *оскулирующими (соприкасающимися) орбитами*, а элементы орбит – *оскулирующими элементами*.

Наибольшие возмущения вызывают следующие факторы:

- Отклонение реального гравитационного поля Земли от создаваемого телом, имеющим форму шара с радиальным распределением плотностей;

- Притяжение Луны и Солнца;
- Сопротивление атмосферой;
- Световое давление;
- Лунно-солнечные приливы;
- Действие прецессии и нутации на земную ось;
- Релятивистские эффекты и др.

Учет этих факторов необходим при существенном повышении точности теории и измерительной аппаратуры.

2.5 Возмущения, вызываемые притяжением Луны и Солнца

Из-за притяжения спутника Луной и Солнцем в элементах орбиты ИСЗ возникают вековые, долгопериодические и короткопериодические возмущения. При этом, возмущения, вызываемые Луной, примерно в 2,2 раза больше возмущений от притяжения Солнца. При высоте спутника в 2000 км возмущения ускорения от Луны в 140 раз меньше, чем от аномалий силы тяжести, однако при высоте в 20000 км эти возмущения уже в два раза больше.

Для вычисления лунно-солнечных возмущений нужно знать элементы орбиты движения Луны, Земли и Солнца и решать задачу с четырьмя телами: Земля – спутник – Луна – Солнце.

Кроме прямого гравитационного действия на спутник Луна и Солнце оказывают вторичные возмущения из-за приливных явлений, деформирующих уровенную поверхность геопотенциала.

2.6 Давление солнечной радиации

Давление прямой солнечной радиации оказывает возмущающее действие на ускорение спутника. При этом, чем больше площадь поверхности ИСЗ и меньше его масса тем больше возмущение в движении спутника. Процесс моделирования этих возмущений весьма трудоемкий, поскольку солнечная радиация изменяется непредсказуемо в течение времени, а коэффициент отражения не одинаков для различных участков поверхности спутника. Хотя масса спутника обычно хорошо известна, его неправильная форма не позволяет определять отношение массы и площади. Другая проблема – это моделирование полутени Земли и назначение теневой функции в зоне перехода от освещенности к тени.

2.7 Сопротивление атмосферы

Считается, что атмосфера вращается вместе с Землей и ее плотность уменьшается с высотой приближенно по экспоненциальному закону, однако вычисление ее для определения возмущающего ускорения является сложным вопросом. Приходится учитывать поправки за эллиптичность атмосферных слоев, временные вариации плотности (годовые, полугодовые), изменение солнечной активности и влияние магнитных бурь и др.

Учет влияния сопротивления атмосферы особенно важен для спутников с орбитами на малой высоте. Фактор торможения атмосферы существенно сказывается на времени жизни низкого ИСЗ. Из-за сопротивления атмосферы ИСЗ теряет энергию, снижается и при высоте 110-120 км входит в плотные слои атмосферы и прекращает свое существование.

Вследствие трудностей учета влияния сопротивления атмосферы спутники для решения геодезических задач запускают на высоту более 1000 км, где возмущения от сопротивления атмосферы уменьшаются.

3 МЕТОДЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

3.1 Решение геодезических задач по наблюдениям ИСЗ

Существуют два основных метода использования ИСЗ в геодезии: *геометрический* и *динамический*.

В *геометрическом* методе осуществляется построение пространственных геодезических сетей с помощью синхронных (одновременных) наблюдений ИСЗ с исходных и определяемых пунктов земной поверхности, при которых точное знание законов движения спутника не обязательно. Пусть векторы \mathbf{R}_A и \mathbf{R}_B определяют положение соответственно исходного (A) и определяемого (B) пунктов наблюдений в общеземной системе координат (X, Y, Z), а векторы ρ_A и ρ_B в этой же системе координат измеренные положения спутника (m) на орбите относительно точек наблюдений (рис.3.1).

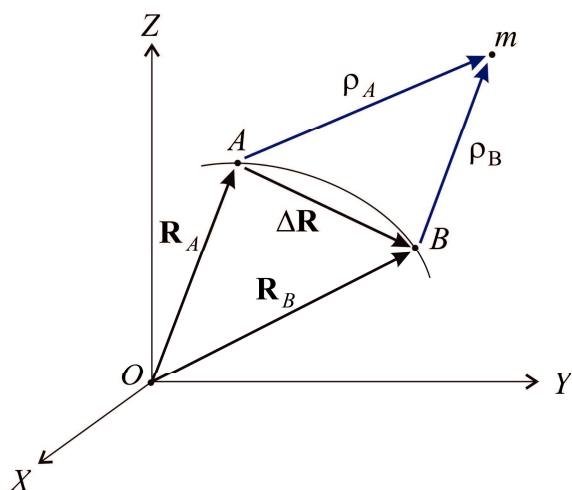


Рисунок 3.1 – Геометрический метод космической геодезии

Тогда уравнение, определяющее связь измеренных и определяемых величин имеет вид

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A = \rho_A - \rho_B. \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что если известны координаты одного пункта, то можно вычислить координаты второго в системе исходного пункта, при этом не нужно знать теории движения ИСЗ.

Динамические методы космической геодезии дают возможность определить координаты пунктов в абсолютной системе, отнесенной к центру масс, параметры гравитационного поля Земли, а так же уточнить элементы

орбиты спутника. Частным случаем динамического метода является *орбитальный* метод, когда совместно определяются только элементы орбиты и координаты пунктов наблюдений.

В общем виде геоцентрический радиус-вектор \mathbf{r} ИСЗ представляет собой сложную функцию элементов орбиты \mathbf{E} , параметров гравитационного поля Земли \mathbf{G} и времени t :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{E}, \mathbf{G}, t) \quad (3.2)$$

Если измеренными величинами в общем случае можно считать топоцентрический радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$, то его связь с геоцентрическим положением спутника \mathbf{r} определится известным выражением

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}(\mathbf{E}, \mathbf{G}, t) - \mathbf{R} = \mathbf{r}(\mathbf{E}_0 + \Delta\mathbf{E}, \mathbf{G}_0 + \Delta\mathbf{G}, t) - (\mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{R}). \quad (3.3)$$

Здесь \mathbf{R} – геоцентрический радиус-вектор пункта измерений на поверхности Земли; $\mathbf{E}_0, \mathbf{G}_0, \mathbf{R}_0$ – приближенные значения соответствующих величин.

После линеаризации (3.3), полагая безошибочными моменты регистрации времени t , имеем систему уравнений поправок измерений

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{E}} \Delta\mathbf{E} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{G}} \Delta\mathbf{G} - \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\mathbf{R}} \Delta\mathbf{R} + (\boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{V}, \quad (3.4)$$

где

$\Delta\mathbf{E}, \Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{R}$ – поправки к приближенным элементам орбиты, параметрам гравитационного поля и координатам пунктов наблюдений соответственно;

$\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\rho}_i$ – векторы приближенных и измеренных величин;

\mathbf{V} – вектор поправок к результатам измерений.

Из решения системы уравнений (3.4) по способу наименьших квадратов, находятся искомые поправки $\Delta\mathbf{E}, \Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{R}$.

3.2 Методы наблюдений ИСЗ

Методы наблюдений искусственных спутников Земли можно разделить на две группы: *оптические* и *радиоэлектронные*.

К *оптическим* наблюдениям относятся визуальные, фотографические, фотоэлектрические и лазерные наблюдения. Точность визуальных наблюдений недостаточна для использования их в геодезических целях. Фотографические наблюдения ИСЗ имели широкое распространение в 1960-1970 годах. При этом наблюдения спутника привязывались к шкале времени, а его положение на снимке – к опорным звездам в системе некоторого

фундаментального каталога. Однако турбулентные процессы, происходящие в атмосфере, не позволяли получить из фотографических наблюдений направления с точностью, превышающей $0,4'' - 0,5''$, поэтому в оптическом диапазоне стали выполняться только лазерные измерения дальности.

Интерференционные, доплеровские и радио дальномерные измерения относят ко второй группе – *радиоэлектронной*.

Наибольшее распространение в геодезической практике из различного рода интерференционных систем получила длиннобазисная радиоинтерферометрия. Здесь в качестве радиоисточника используются удаленные от Земли на сотни световых лет космические радиоисточники – квазары. Принцип их использования основан на том, что сигналы от квазаров σ на антенны радиотелескопов, находящихся друг от друга на большом расстоянии, поступают не одновременно, а с некоторым запаздыванием τ , обусловленным разностью расстояний от базисных пунктов до квазара (рис.3.2).

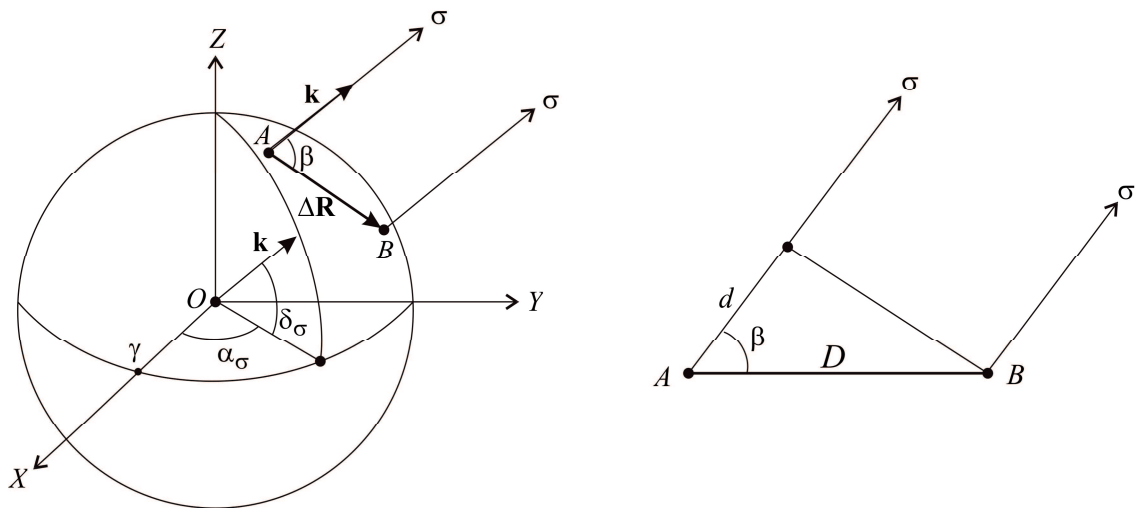


Рисунок 3.2 – Геометрия длиннобазисной радиоинтерферометрии

Положим $d = \tau c$ – разность расстояний от базовых пунктов A и B до квазара σ ; c – скорость распространения электромагнитных волн; D – базисная линия; β – угол между базисной линией и направлением на квазар. Тогда, согласно рис. 3.2 имеем

$$c \tau = D \cos \beta . \quad (3.5)$$

Направление на квазар определяется единичным вектором \mathbf{k} , компоненты которого в общеземной системе координат имеют значения

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \cos \delta_{\sigma} \cos(\alpha_{\sigma} - S_0) \\ \cos \delta_{\sigma} \sin(\alpha_{\sigma} - S_0) \\ \sin \delta_{\sigma} \end{bmatrix},$$

где $\alpha_\sigma, \delta_\sigma$ – прямое восхождение и склонение квазара; S_0 – истинное звездное время на меридиане Гринвича.

Скалярное произведение вектора положения $\Delta \mathbf{R}$ станции A относительно станции B и вектора \mathbf{k} дает

$$\Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{k} = |\Delta \mathbf{R}| \cos \beta = D \cos \beta,$$

или, с учетом выражения (2.16):

$$\begin{aligned} c\tau = \Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{k} = \\ = \Delta X \cos \delta_\sigma \cos(\alpha_\sigma - S_0) + \Delta Y \cos \delta_\sigma \sin(\alpha_\sigma - S_0) + \Delta Z \sin \delta_\sigma \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) является уравнением связи измеряемой величины τ , координат $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ пункта B относительно пункта A , прямым восхождением α_σ и склонением δ_σ квазара. Следует заметить, что для радиоисточников (квазаров) погрешности в прямых восхождениях составляют $\pm 0,00035''$, а в склонениях – $\pm 0,00040''$.

В доплеровском методе измеряют разность частоты, принимаемой на станции, и стандарта частоты. Так, если передатчик на борту ИСЗ излучает сигнал с частотой колебания f , то наземный приемник регистрирует излучение с частотой f_E , смещенной на величину

$$\Delta f_D = f_E - f = -\frac{f V_r}{c}, \quad (3.7)$$

где c – скорость распространения радиоволн; V_r – радиальная скорость спутника. При выполнении доплеровских измерений производится подсчет числа n периодов доплеровской частоты за промежуток времени между излучением t_1 и приемом t_2 сигнала. Тогда

$$\Delta f_D = -\frac{n}{t_2 - t_1}$$

и на основании (3.7) имеем

$$V_r = \frac{c n}{f(t_2 - t_1)}. \quad (3.8)$$

Доплеровские системы позволяют получать радиальную составляющую топоцентрической скорости ИСЗ с погрешностью не большей, чем $0,01$ м/с.

При выполнении радиодальномерных измерений импульсный приемопередатчик спутника принимает посылаемый наземной станцией сигнал, модулированный по фазе. И ретранслирует его как фазовую модуляцию с измененной несущей частотой. На наземной станции фазометром измеряют фазовый сдвиг модуляции и по нему вычисляют расстояние.

К классу радиодальномерных измерений относится спутниковое нивелирование. Спутниковое нивелирование (спутниковая альтиметрия) используется с целью: определения высот геоида, получения информации о топографии Мирового океана, определения (уточнения) положения центра масс Земли и в других случаях. Метод спутникового нивелирования состоит в определении расстояний от спутника до подстилающей поверхности (вода, суша) по измеренным разностям времени между моментами посылки и возврата вертикально направленного радиоимпульса.

3.3 Глобальные системы спутникового позиционирования

Бурное развитие космической геодезии получило с совершенствованием глобальных систем позиционирования, позволяющих эффективно решать традиционные и новые задачи геодезии. В начале 1980-х годов появились спутниковые радионавигационные системы (СРНС) – американская GPS и советская ГЛОНАС. Каждая из этих СРНС при полном развертывании состоит из 24 спутников, движущихся на почти круговых орбитах с высотой около 20000 км. Спутники GPS распределены в 6-и, а спутники ГЛОНАС в 3-х орбитальных плоскостях, развернутых через 60° и через 120° по долготе восходящего узла и с наклоном орбиты 55° и 65° соответственно. Период обращения спутников составляет примерно 12 часов. Орбиты расположены таким образом, что в любое время над любой точкой земной поверхности видно «созвездие» не менее чем из четырех космических аппаратов. На борту каждого спутника имеется: атомные эталоны частоты и времени; аппаратура для передачи и приема радиосигналов; бортовые вычислительные средства, предназначенные для хранения и обработки данных, полученных от наземных центров управления и разнообразное вспомогательное оборудование. Спутники непрерывно передают сигналы, содержащие информацию об их положении и точном времени, а также дальномерные коды, позволяющие измерять расстояние.

Определение координат пользователя СРНС производится с помощью специальных спутниковых приемников. Каждый приемник может производить измерения либо независимо от других приемников, либо синхронно с другими приемниками. В первом случае, называемом *абсолютным методом*, достигается точность однократного определения координат порядка 1-15 м. Более высокую точность можно получить при одновременных наблюдениях спутников несколькими приемниками. При таком методе измерений один из приемников обычно располагается в пункте

с известными координатами. Тогда положение остальных приемников можно определить относительно первого приемника с точностью несколько миллиметров. Этот метод получил название *относительного метода*.

Методы ГЛОНАС/GPS измерений можно разделить на *статические* и *кинематические*. При статических измерениях все приемники находятся на пунктах в неподвижном состоянии. Продолжительность наблюдений составляет от пяти минут до нескольких часов и даже суток, в зависимости от требуемой точности и расстояний между пунктами. При кинематических измерениях один из приемников находится постоянно на опорном пункте, а второй приемник (мобильный) находится в движении. Точность кинематических наблюдений немного ниже, чем в статике (обычно 2-3 см на линию до 10 км).

В основе определения координат спутникового приемника лежит четырехлучевая линейная засечка. Роль опорных пунктов выполняют космические аппараты (не менее 4-х), координаты которых известны в любой момент времени. При помощи земной и спутниковой аппаратуры измеряются расстояния $S_{i,A}$ до ИСЗ. Аналитическое решение заключается в решении системы уравнений

$$S_{i,A}^2 = (x_i - X_A)^2 + (y_i - Y_A)^2 + (z_i - Z_A)^2, \quad (3.9)$$

где X_A, Y_A, Z_A – искомые координаты приемника; x_i, y_i, z_i ($i=1,2,3,4,\dots$) – известные координаты спутников, отнесенные к определенному моменту времени.

3.4 Роль спутниковых методов в геодезии

Первые искусственные спутники Земли применялись в геодезии только как высоко поднятые визирные цели. Развитие динамического метода космической геодезии, когда спутник стал носителем координат, позволило решать геодезические задачи комплексно – определять координаты станций наблюдений, параметры гравитационного поля Земли и многое другое. В настоящее время с высокой точностью определены фундаментальные геодезические постоянные, определяющие геодезическую отсчетную систему. Основные задачи координатно-временного обеспечения решаются при использовании современных быстро развивающихся космических технологий: радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой, лазерной локации ИСЗ, глобальных систем позиционирования, доплеровских систем. Эти технологии используются для решения таких задач, как: установление небесной и земной опорных систем координат; определение параметров ориентации этих систем – постоянный мониторинг вращательного движения Земли. К параметрам ориентации Земли (ПОЗ) относят координаты полюса, всемирное время, прецессию и нутацию. Международная служба вращения

Земли публикует данные о ПОЗ в отчетах, месячных и еженедельных бюллетенях.

Особая роль отводится космической геодезии в создании государственной геодезической сети. Построение такой сети начато в 1999 году. Сеть, как и прежде, строится от общего к частному. Она включает в себя геодезические построения различных классов точности:

- фундаментальную астрономо-геодезическую сеть (ФАГС);
- высокоточную геодезическую сеть (ВГС);
- спутниковую геодезическую сеть 1-го класса (СГС-1);
- астрономо-геодезическую сеть 1 и 2-го классов;
- геодезические сети сгущения 3 и 4 классов.

Сеть ФАГС создается с целью долгосрочного поддержания высокоточной трехмерной геоцентрической системы координат и включает в себя: постоянно действующие пункты и обсерватории для наблюдения за ИСЗ и другими космическими объектами; периодически определяемые пункты, наблюдения на которых планируется повторять через интервал не более 10 лет. Пункты ФАГС равномерно располагаются на территории страны с расстоянием между смежными точками 650-1000 км. На пунктах ФАГС измеряется абсолютное значение силы тяжести. Пространственное положение пунктов здесь определяется методами космической геодезии в геоцентрической системе координат. Средняя квадратическая погрешность определения положения центра масс Земли составляет 10-15 см, а средняя квадратическая погрешность взаимного положения пунктов ФАГС должна быть не более 2 см по плановому положению и 3 см по высоте с учетом скорости их изменения во времени.

Пункты ВГС опираются на пункты ФАГС и удалены один от другого на 150-300 км. Основные функции ВГС состоят в дальнейшем распространении на всю территорию России геоцентрической системы координат и уточнении параметров взаимного ориентирования геоцентрической и референцной систем координат. Средняя квадратическая погрешность определения планового положения пунктов ВГС не должна превышать $3 \text{ мм} + 5 \cdot 10^{-8} D$ (D – расстояние между пунктами в мм) и $5 \text{ мм} + 7 \cdot 10^{-8} D$ по геодезической высоте.

Основная функция СГС-1 состоит в обеспечении оптимальных условий для реализации точностных и оперативных возможностей спутниковой аппаратуры при переводе геодезического обеспечения территории России на спутниковые методы определения координат. Пункты СГС-1 проектируются в наиболее удобных для использования местах с хорошими условиями наблюдений, со средними расстояниями между смежными пунктами порядка 25-35 км. При этом предусматривается максимально возможное совмещение пунктов сети с существующими грунтовыми реперами для исключения дорогостоящих работ по закладыванию центров. Средняя квадратическая погрешность определения положения пунктов СГС-1 относительно ближайших пунктов ФАГС и ВГС не должна превышать 1-2 см в районах с

сейсмической активностью 7 и более баллов и 2-3 см в остальных районах страны.

3.5 Геодинамические исследования методами космической геодезии

С развитием новых средств изучения фигуры Земли и ее гравитационного поля все большее значение приобретает кинематический аспект геодезии – определение изменений положений точек земной поверхности и параметров гравитационного поля земли во времени. Появился новый раздел в науке о Земле, лежащий на стыке геодезии, геофизики и астрономии, занимающийся проблемами изучения изменений пространственного положения точек и гравитационного поля Земли во времени и их интерпретаций и получивший название *геодинамики*.

Динамика Земли проявляется в движениях полюса и неравномерности ее вращения. Новые возможности в изучении движения полюсов открывают доплеровские и лазерные наблюдения ИСЗ, лазерная локация Луны, длиннобазисная радиоинтерферометрия.

Для объективной интерпретации изменений точек земной поверхности привлекаются различные современные теории: тектоники плит, упругих деформаций, приливов и вращения Земли и др.

В последние десятилетия благодаря значительному повышению точности измерительной техники. Используемой для определения параметров движения, ИСЗ, методы космической геодезии стали широко применяться для изучения глобальных и региональных геодинамических процессов и движения Земли как планеты. Важнейшим вкладом космической геодезии в глобальную тектонику стало подтверждение достоверности движений литосферных плит. Движение крупных плит достаточно стабильно на поверхности сфероида и происходит со средней скоростью 50 мм/год. Локальные тектонические движения вблизи границ плит характеризуются большим вертикальным сдвигом.

Принципиальное отличие результатов, полученных по наблюдениям ИСЗ от данных наземных гравиметрических и астрономических наблюдений, состоит в том, что они не связаны с отвесной линией и не подвергаются влиянию особенностей внутреннего строения Земли. Поэтому совместный анализ спутниковых наблюдений, гравиметрических и астрономических данных дает возможность получать новые научные результаты и количественно оценить механические деформации Земли.

3.6 Моделирование движения жестких блоков земной поверхности

С конца 60-х годов прошлого века, за 10-15 лет, сформировалась новая фундаментальная теория тектоники литосферных плит, согласно которой на

поверхности нашей планеты перемещается ансамбль из 11-16 больших по размерам плит литосферы хрупкой оболочки Земли.

В первом приближении поверхность Земли разделяется на приподнятый над средним уровнем моря континентальный регион и опущенный океанический регион планеты. Около 70% земной поверхности находится под водой. Поэтому, чтобы получить полное представление об особенностях геологического строения земного шара, необходимо мысленно убрать водную оболочку планеты. Тогда наряду с хорошо известными горными системами и обширными континентальными равнинами проявятся важнейшие линейные структуры – системы срединно-океанических хребтов и системы глубоководных желобов. Литосферные плиты выделяются по оконтуривающим их узким поясам сейсмичности. Именно вдоль этих поясов происходят относительные перемещения литосферных плит.

Теория движения литосферных плит опирается на два постулата:

1. Литосферные плиты являются жесткими, т.е. они ведут себя как квазиупругие тела, способные передавать прилагаемые к ним напряжения на любые расстояния, не испытывая при этом внутренней пластической деформации;
2. Радиус Земли не изменяется в сколько-нибудь ощутимых размерах, т.е. Земля не сжимается и не расширяется.

Из этих двух постулатов вытекает, что движение плит должно происходить строго по законам сферической геометрии. Все перемещения жестких плит по поверхности сферической Земли могут быть представлены как вращения вокруг некоторой проходящей через центр математической оси. Ось вращения пересекает поверхность сферической Земли в двух, диаметрально противоположных, точках. Эти точки носят название эйлеровых полюсов, или полюсов вращения. Для описания движения плиты по поверхности сфероида необходимо знать три параметра, например, сферические координаты полюса вращения (широту Φ и долготу Λ) и угловую скорость ω ее вращения. Направляющий вектор оси вращения литосферной плиты \mathbf{n} относительно положения какой-либо точки на сфере в системе Земных прямоугольных пространственных координат (X, Y, Z) определяется из соотношения

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

а вектор угловой скорости вращения \mathbf{W} может быть рассчитан по формуле

$$\mathbf{W} = \omega \mathbf{n} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T. \quad (3.11)$$

В настоящее время современные системы отсчета (земные отсчетные системы) базируются на наблюдениях радиоинтерферометрами со сверхдлинными базами, лазерной локации Луны, всевозможных спутниковых наблюдениях. Для этих отсчетных систем, начиная с 1993 года, используется модель NNR NUVEL1A абсолютного движения плит.

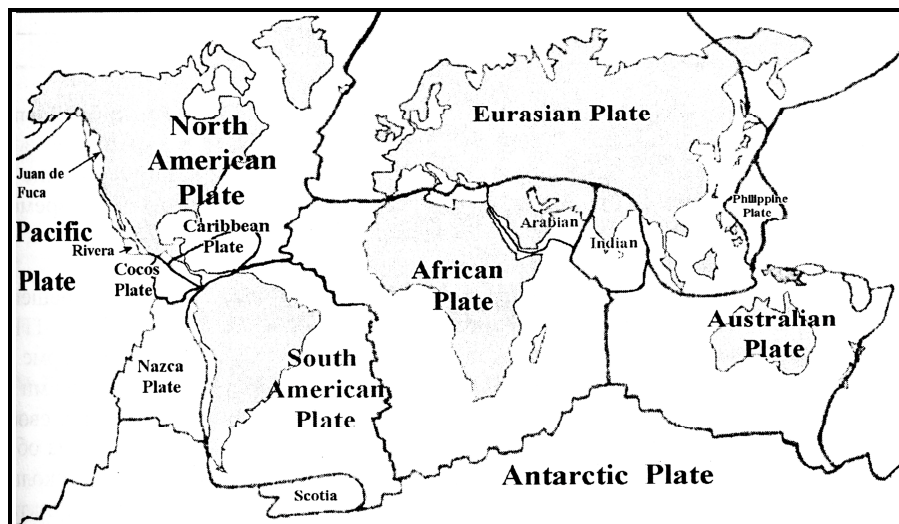


Рисунок 3.3. – Карта распределения основных плит на поверхности Земли для модели NNR NUVEL 1A

Для 16 тектонических плит (рис. 3.3) угловые скорости вращения (рад./млн.лет) для модели NNR NUVEL1A приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Скорости вращения тектонических плит

Название плиты	ω_x	ω_y	ω_z
Pacific	-0.001510	0.004840	-0.009970
Cocos	-0.010425	-0.021605	0.010925
Nazca	-0.001532	-0.008577	0.009609
Caribbean	-0.000178	-0.003385	0.001581
South America	-0.001038	-0.001515	-0.000870
Antarctica	-0.000821	-0.001701	0.003706
India	0.006670	0.000040	0.006790
Australia	0.007839	0.005124	0.006282
Africa	0.000891	-0.003099	0.003922
Arabia	0.006685	-0.000521	0.006760
Eurasia	-0.000981	-0.002395	0.003153
North America	0.000258	-0.003599	-0.000153
Juan de Fuca	0.005200	0.008610	-0.005820
Philippine	0.010090	-0.007160	-0.009670
Rivera	-0.009390	-0.030960	0.012050
Scotia	-0.000410	-0.002660	-0.001270

Для определения смещения пункта на поверхности Земли, вызванного движением той или иной тектонической плиты обратимся к рис.3.4.

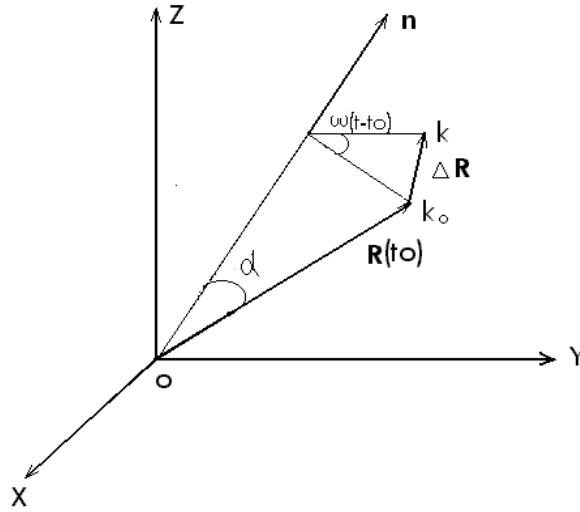


Рисунок 3.4 – Смещение пункта на земной поверхности вследствие вращения литосферной плиты

Пусть заданный в эпоху t_0 пункт на поверхности плиты расположен в точке k_0 , положение которого в системе координат (XYZ) определяется вектором $\mathbf{R}(t_0)$. За промежуток времени $(t - t_0)$ эта точка займет положение k . Угол между осью вращения плиты и направлением на точку k_0 равен α . Вектор смещения пункта $\Delta \mathbf{R}_\omega$ за время $(t - t_0)$ с точностью до первого порядка малости перпендикулярен к плоскости, содержащей вектора \mathbf{n} и $\mathbf{R}(t_0)$ и равен

$$\Delta \mathbf{R}_\omega = \omega(t - t_0) \mathbf{n} \times \mathbf{R}(t_0), \quad (3.12)$$

или, с учетом (3.11)

$$\Delta \mathbf{R}_\omega = (t - t_0) \mathbf{W} \times \mathbf{R}(t_0), \quad (3.13)$$

где

$$\mathbf{R}(t_0) = [X_0, Y_0, Z_0]^T$$

В формулах (3.12) и (3.13) символом « \times » обозначено векторное произведение. Раскрывая выражение (3.13) имеем

$$\Delta \mathbf{R}_\omega = (t - t_0) \begin{bmatrix} +\omega_y Z_0 - \omega_z Y_0 \\ -\omega_x Z_0 + \omega_z X_0 \\ +\omega_x Y_0 - \omega_y X_0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Обозначим

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & +\omega_y \\ +\omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & +\omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Окончательно получим поправку в координаты пункта за движение литосферных плит:

$$\Delta \mathbf{R} = (t - t_0) \mathbf{Q} \mathbf{R}(t_0). \quad (3.15)$$

На основании выражения (3.15) можно определять как смещение пункта наблюдений за промежуток времени $(t-t_0)$, так и уточнять кинематическую модель движения жесткого блока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Антонович, К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии [Текст]: в 2т. Т.1: Монография / К.М. Антонович; ГОУ ВПО «Сибирская государственная геодезическая академия». – М.: Картгеоцентр, 2005.-334 с.: ил.

Курошев, Г.Д. Космическая геодезия и глобальные системы позиционирования [Текст]: учеб. пособие / Г.Д. Курошев. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2011. – 182 с.

Крылов, В.И. Международные системы отсчета: Современное состояние [Текст] / В.И. Крылов, Буй Йен Тинь // Труды международной научно-технической конференции, посвященной 225-летию МИИГАиК. Геодезия. – М.: МИИГАиК, 2004. – С. 187-195.

Телеганов, Н.А. Метод и системы координат в геодезии [Текст]: учеб. пособие / Н.А. Телеганов, Г.Н. Тетерин. – Новосибирск: СГГА. – 2008. – 143 с.

Космическая геодезия [Текст]: учебник для вузов / В.Н. Баранов, Е.Г. Бойко, И.И. Краснорылов и др. – М.: Недра, 1986. – 407 с., ил.