

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Донской государственный технический университет»

КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Методические указания к выполнению контрольной работы
для обучающихся по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия»,
специализация «Инженерная геодезия»
заочной формы обучения

Ростов-на-Дону

2018

УДК 528.7

Космическая геодезия: методические указания к выполнению контрольной работы для обучающихся по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия», специализация «Инженерная геодезия» заочной формы обучения. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2018. – 23 с.

Изложены подробные пояснения, варианты заданий и рекомендации по выполнению контрольной работы.

Составитель: канд. экон. наук Н.В. Самсонова

© Донской государственный
технический университет, 2018

© Самсонова Н.В., 2018

1 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Исходной системой координат, в которой задаются положения станций наблюдений ИСЗ, является *геодезическая*, определяемая принятым на данной территории референц-эллипсоидом. В этой системе координаты точек земной поверхности задаются геодезической широтой B , определяемой как угол между нормалью к эллипсоиду, проходящей через данную точку, и плоскостью экватора; геодезической долготой L – двугранным углом между плоскостью, проходящей через пункт и малую ось эллипсоида, и плоскостью начального меридиана, также проходящей через малую ось эллипсоида; высотой H над эллипсоидом. Референц-эллипсоид ориентируют так, чтобы его малая ось была параллельна средней оси вращения Земли в некоторую стандартную эпоху.

1.1 Преобразование исходных геодезических координат станций наблюдений B, L, H в гринвичские прямоугольные координаты $X_{Pto}, Y_{Pto}, Z_{Pto}$, связанные с референц-эллипсоидом

Для решения этой задачи применяются формулы сфероидической геодезии

$$\left. \begin{aligned} X_{Pto} &= (N + H) \cos B \cos L \\ Y_{Pto} &= (N + H) \cos B \sin L \\ Z_{Pto} &= \left(\frac{b^2}{a^2} N + H \right) \sin B \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где a – большая полуось референц-эллипсоида; $b = a\sqrt{1 - e^2}$ – его малая полуось; e – эксцентриситет меридианного эллипса; N – радиус кривизны первого вертикала, вычисляемый по формуле

$$N = a^2 (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Обратный переход производится методом последовательных приближений. Сначала из первых двух формул (1) находим

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y_{P_{t_0}}}{X_{P_{t_0}}}. \quad (3)$$

Разделив третью формулу (1) на квадратный корень из суммы квадратов двух первых формул, получим:

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z_{P_{t_0}}}{\sqrt{X_{P_{t_0}}^2 + Y_{P_{t_0}}^2}} + \frac{e^2 N}{N + H}. \quad (4)$$

В первом приближении второй член в (4) отбрасываем и находим первое приближение $B^{(1)}$. С этим значением находим первое приближение $H^{(1)}$ по формуле

$$H^{(1)} = \frac{\sqrt{X_{P_{t_0}}^2 + Y_{P_{t_0}}^2}}{\cos B^{(1)}} - N. \quad (5)$$

Зная $H^{(1)}$, по формуле (4) находим второе приближение $B^{(2)}$; далее по формуле (5) – второе приближение $H^{(2)}$ со значением $B^{(2)}$ и т.д. Процесс приближения заканчиваем, когда разница между последними приближениями становится меньше заданной величины – 0.01".

Подтверждением правильности расчётов является сходимость результатов вычислений с исходными данными из первой части задания.

1.2 Переход к гринвичским координатам X_{to} , Y_{to} , Z_{to}

При переходе к гринвичским координатам X_{to} , Y_{to} , Z_{to} для стандартной эпохи в системе общего времени нужно сделать параллельный перенос системы координаты $X_{P_{t_0}}$, $Y_{P_{t_0}}$, $Z_{P_{t_0}}$ из центра референц-эллипсоида O в центр общего земного эллипсоида O . Если ΔX , ΔY , ΔZ – координаты точки O в системе $X_{P_{t_0}}$, $Y_{P_{t_0}}$, $Z_{P_{t_0}}$, то указанное преобразование имеет вид

$$\left. \begin{aligned} X_{t_0} &= X_{P_{t_0}} - \Delta X \\ Y_{t_0} &= Y_{P_{t_0}} - \Delta Y \\ Z_{t_0} &= Z_{P_{t_0}} - \Delta Z \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Сначала по известным из сфероидической геодезии дифференциальным формулам II рода находим поправки ΔB , ΔL , ΔH к геодезическим координатам:

$$\begin{aligned}(M + H)\Delta B &= \frac{N}{a}e^2 \sin B \cos B \cdot \Delta a + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{1-e^2} + N\right) \sin B \cos B \times \\ &\times \Delta e^2 - (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \sin B + \Delta Z \cos B ; \\ (N + H) \cos B \cdot \Delta L &= -\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L ;\end{aligned}\quad (7)$$

$$\Delta H = \frac{a}{N} \Delta a - N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} + (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \cos B + \Delta Z \sin B,$$

где

$$\Delta e^2 = 2(1 - \alpha)\Delta\alpha$$

;

$M = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{2}{3}}$ – радиус кривизны меридианного сечения, e – его эксцентриситет, α – полярное сжатие, Δa , $\Delta\alpha$ – малые разности в сжатии и большой полуоси между общим земным и референц-эллипсоидом:

	a , км	α
Референц-эллипсоид Красовского	6378.245	1:298.3
Общий земной эллипсоид (1967 г.)	6378.165	1:298.25

Далее исправляем найденными поправками исходные геодезические координаты

$$\left. \begin{aligned}B_0 &= B + \Delta B \\ L_0 &= L + \Delta L \\ H_0 &= H + \Delta H\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и по формулам (1) и (6) со значениями B_0 , L_0 , H_0 вычисляем гринвичские координаты в системе общего земного эллипсоида X_{to} , Y_{to} , Z_{to} .

1.3 Определение направляющих косинусов

Все дальнейшие преобразования заключаются в параллельных переносах и поворотах координатных осей. Пусть требуется перейти от некоторой системы координат $\xi\eta\zeta$ к $\xi'\eta'\zeta'$ (рис. 1). Основой преобразования служат эйлеровы углы:

угол прецессии Ω – угол между осью ξ и линией пересечения AA' плоскостей $\xi\eta$ и $\xi'\eta'$;

угол нутации I – угол между плоскостями $\xi\eta$ и $\xi'\eta'$ или между направлениями осей ξ и ξ' ;

угол чистого вращения ω – угол в плоскости $\xi'\eta'$ между AA' и направлением оси ξ' .

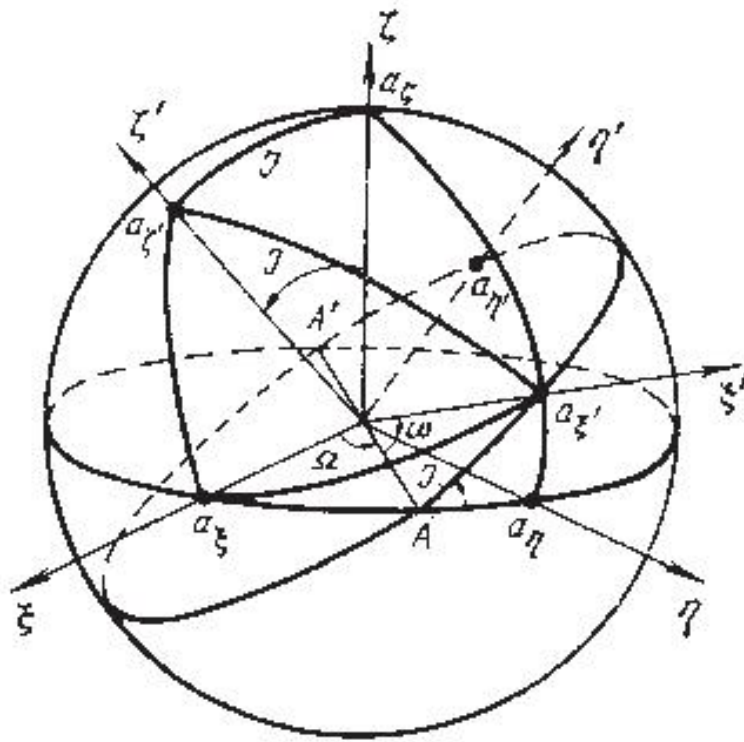


Рис. 1. Углы Эйлера

Углы Эйлера позволяют вычислить косинусы углов между осями «старой» системы $\xi\eta\zeta$ и осями «новой» системы $\xi'\eta'\zeta'$ – *направляющие косинусы*. Направляющие косинусы осей находятся по теореме косинусов из сферической тригонометрии.

Так направляющий косинус оси ξ' относительно оси ξ найдётся из сферического треугольника $a_\xi a_{\xi'} A$:

$$\cos \overline{a_\xi a_{\xi'}} = l_1 = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos I. \quad (9)$$

Направляющий косинус оси ξ' относительно оси η – из сферического треугольника $Aa_\xi a_\eta$:

$$\cos \widetilde{a_{\xi'} a_{\eta}} = m_1 = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos I. \quad (10)$$

Направляющий косинус оси ξ' относительно оси ζ – из сферического треугольника $Aa_{\xi'}a_{\zeta}$:

$$\cos \widetilde{a_{\xi'} a_{\zeta}} = n_1 = \sin \omega \sin I. \quad (11)$$

Аналогичным образом находят направляющие косинусы l_2, m_2, n_2 оси η' относительно осей ξ, η, ζ и направляющие косинусы l_3, m_3, n_3 оси ζ' относительно осей ξ, η, ζ соответственно.

$$\left. \begin{aligned} l_2 &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos I \\ m_2 &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos I \\ n_2 &= \cos \omega \sin I \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} l_3 &= \sin \Omega \sin I \\ m_3 &= -\cos \Omega \sin I \\ n_3 &= \cos I \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Прямое и обратное преобразование можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= l_1 \xi + m_1 \eta + n_1 \zeta \\ \eta' &= l_2 \xi + m_2 \eta + n_2 \zeta \\ \zeta' &= l_3 \xi + m_3 \eta + n_3 \zeta \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= l_1 \xi' + l_2 \eta' + l_3 \zeta' \\ \eta &= m_1 \xi' + m_2 \eta' + m_3 \zeta' \\ \zeta &= n_1 \xi' + n_2 \eta' + n_3 \zeta' \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}; \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В формулах (16) и (17) матрицы, элементами которых служат направляющие косинусы, называют *матрицами поворота* или *матрицами вращения*.

Для контроля вычислений запишем

$$\left. \begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

$$\sum l_i \cdot m_i = \sum l_i \cdot n_i = \sum m_i \cdot n_i = 0. \quad (19)$$

1.4 Связь между прямоугольными и сферическими координатами α, δ

Из треугольников OCC'' , $OC''C_x''$ и $OC''C_y''$ на рис. 2 для геоцентрических координат получим

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos \alpha \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha \\ z &= r \sin \delta \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos(\lambda + \bar{S}) \\ y &= r \cos \varphi \sin(\lambda + \bar{S}) \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

где φ, λ – геоцентрические широта и долгота ИСЗ.

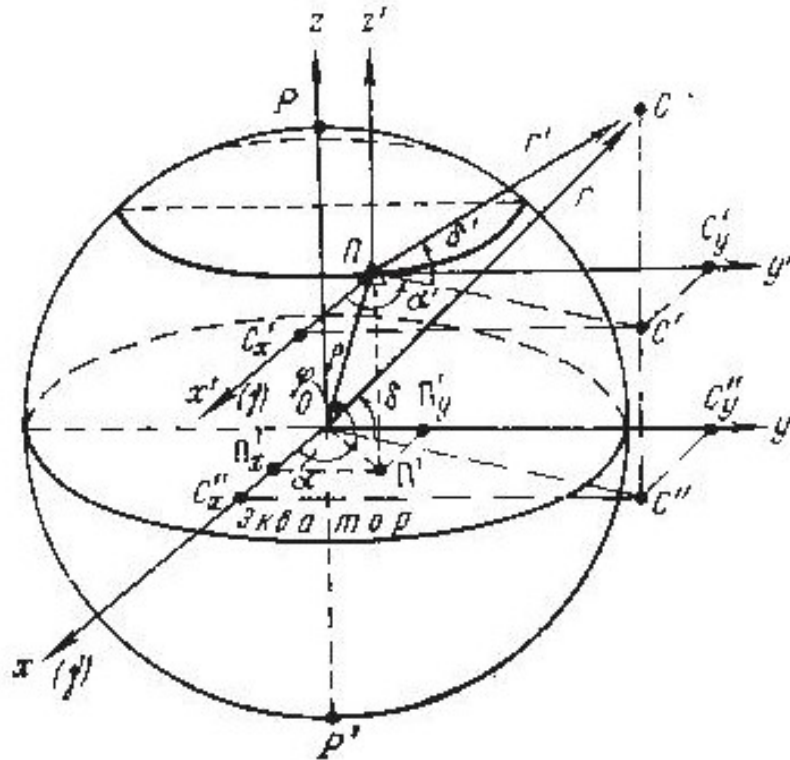


Рис. 2. Геоцентрическая и топоцентрическая системы координат

То же для топоцентрических координат:

$$\left. \begin{aligned} x' &= r' \cos \delta' \cos \alpha' \\ y' &= r' \cos \delta' \sin \alpha' \\ z' &= r' \sin \delta' \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Обратное преобразование:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \right\}; \quad (22)$$

топоцентрические координаты:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{y'}{x'} \\ \operatorname{tg} \delta' &= \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

Если система координат гринвичская, то x, y, z нужно заменить на X, Y, Z , а α или α' - на $\alpha - S$ или $\alpha' - S$, где S – гринвичское звёздное время.

1.5 Связь между геоцентрическими и топоцентрическими прямоугольными координатами

$$\left. \begin{aligned} X &= X' + X_{\Pi} \\ Y &= Y' + Y_{\Pi} \\ Z &= Z' + Z_{\Pi} \end{aligned} \right\}, \quad (24)$$

где $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, Z_{\Pi}$ – координаты пункта. Формулы (20), (21) и (24) позволяют найти связь между сферическими топоцентрическими и геоцентрическими координатами.

Допустим, что в некоторый момент UT-0 с пункта P с известными геодезическими координатами B, L, H определены топоцентрические координаты спутника: r', α', δ' .

Необходимо найти геоцентрические координаты спутника, если известно, что синхронным методом были определены углы Эйлера ($\Omega = 1.9''$, $I = 2.2''$, $\omega = 1.5''$) на момент звёздного времени S_0 .

Для решения этой задачи предварительно вычисляют прямоугольные координаты пункта P по формулам (1).

Чтобы найти координаты пункта P в геоцентрической системе, используют формулы:

$$\left. \begin{aligned} X_P &= \Delta x + X + \frac{\Omega}{\rho} Y + \frac{\omega}{\rho} Z \\ Y_P &= \Delta y + Y - \frac{\Omega}{\rho} X + \frac{I}{\rho} Z \\ Z_P &= \Delta z + Z + \frac{\omega}{\rho} X - \frac{I}{\rho} Y \end{aligned} \right\}; \quad (25)$$

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.$$

При помощи формул (21) находим прямоугольные координаты спутника, выполняя при этом переход от звёздной системы координат к гринвичской:

$$\left. \begin{aligned} x' &= r' \cos \delta' \cos(\alpha' - S) \\ y' &= r' \cos \delta' \sin(\alpha' - S) \\ z' &= r' \sin \delta' \end{aligned} \right\} \quad (21a)$$

с учётом

$$UT0 = (S - S_0) - (S - S_0)v; \quad v = 1 / \frac{366}{2422}; \quad S = \frac{UT0 + S_0(1 - v)}{1 - v}. \quad (26)$$

Геоцентрические координаты спутника определяются по формулам (24)

$$\left. \begin{aligned} x_c &= x' + X_P \\ y_c &= y' + Y_P \\ z_c &= z' + Z_P \end{aligned} \right\}, \quad (24a)$$

а сферические геоцентрические его координаты можно вычислить из зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \arctg \frac{y_c}{x_c} + S \\ \delta &= \arctg \frac{z_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}} \\ r &= \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

Задание

1. Преобразовать заданные геодезические координат станций наблюдений B, L, H в гринвичские прямоугольные координаты $X_{Pto}, Y_{Pto}, Z_{Pto}$.

2. Произвести вычисления обратного перехода методом последовательных приближений.
3. Выполнить переход к гринвичским координатам X_{to} , Y_{to} , Z_{to} .
4. По заданным углам Эйлера вычислить направляющие косинусы при повороте осей координат. Произвести контроль вычислений.
5. Вычислить геоцентрические координаты спутника по известным его топоцентрическим координатам.

Исходные данные

Геодезические координаты		Углы Эйлера	
B	$M^\circ (M+S)' (1.25 \cdot V)''$	Ω	$(40+N)^\circ (14+N+S)' (V)''$
L	$N^\circ (N+S)' (1.25 \cdot W)''$	I	$(25+M)^\circ (11+M+S)' (W)''$
H	$10 \cdot V$ м	ω	$(N+M)^\circ (N+M+S)' (V+W)''$
Топоцентрические координаты спутника		Звёздное время	
r'	$854290 + 10 \cdot V$ м	S_0	$14^h 39^m 09.833^s + 0.1 \cdot V^s$
α'	$\left(\frac{N}{4}\right)^h (V)^m W^s$		
δ'	$3N^\circ V'W''$	UT-0	$18^h 24^m 12.793^s + 0.1 \cdot W^s$

Здесь M – две первые цифры номера зачётной книжки; N – две последние цифры номера зачётной книжки; S – количество букв в фамилии; $V = \frac{M+S}{4}$; $W = \frac{N+S}{3}$.

2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

Основным фактором, определяющим движение ИСЗ, является внешнее гравитационное поле Земли (геопотенциал). Кроме того, на движение спутников действуют следующие факторы: притяжение Луны и Солнца, атмосферное торможение, давление света. Существует также ряд второстепенных факторов, влияющих на движение спутника (действие магнитного поля Земли, влияние приливов, релятивистские эффекты).

Если бы Земля была строго сферической с равномерным распределением плотности, то её гравитационный потенциал совпадал бы с потенциалом материальной точки, масса которой равна Земле. Тогда, при отсутствии перечисленных факторов, ИСЗ двигался бы строго по законам Кеплера:

1) орбитой спутника был бы эллипс, в фокусе которого находился бы центр масс Земли;

2) секториальная скорость спутника была бы постоянное, т.е. радиус-вектор спутника описывал бы в равные времена равные площади;

3) отношение квадрата периода обращения спутника к кубу большой полуоси его орбиты было бы величиной постоянной. Такое движение называется *невозмущённым*.

В действительности движение ИСЗ в поле тяготения реальной Земли и под действием указанных факторов не подчиняется законам Кеплера. Это движение называется *возмущённым*. Отличия возмущённой орбиты ИСЗ от эллиптической невозмущённой называют *возмущениями*.

2.1 Невозмущённое движение

Движение центра масс ИСЗ в околоземном пространстве под действием силы притяжения Земли, принимаемой за материальную точку или сферу с равномерным распределением масс (центральное поле) описывается дифференциальными уравнениями невозмущённого движения. В инерциальной системе координат эти уравнения имеют вид:

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3}; \quad \ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3}; \quad \ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3}, \quad (28)$$

где $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – составляющие ускорения по координатным осям;

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние между центрами масс Земли и ИСЗ, т.е.

r – длина геоцентрического радиуса-вектора ИСЗ;

μ – геоцентрическая гравитационная постоянная.

Дифференциальные уравнения невозмущённого движения интегрируются в конечном виде. В результате получаются шесть независимых интегралов с шестью постоянными интегрирования. Эти шесть интегралов определяют движение ИСЗ по законам Кеплера.

Постоянные интегрирования находятся по начальным условиям движения, т.е. координатам (x_0, y_0, z_0) и составляющим скорости $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ ИСЗ на момент t_0 . Обычно для геометрической наглядности и удобства

вычислений формальные постоянные интегрирования связывают взаимно однозначными соотношениями с геометрическими элементами, характеризующими размер и форму орбиты, положение ИСЗ на орбите, а также положение самой орбиты в пространстве. Наибольшее распространение получили кеплеровы элементы орбиты. Эллиптическая орбита ИСЗ изображена на рис. 3.

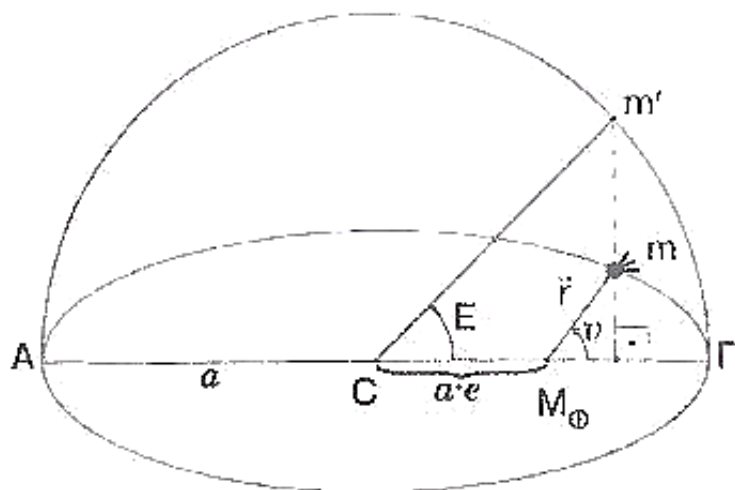


Рис. 3. Эллиптическая орбита ИСЗ

C – центр орбитального эллипса, описываемого ИСЗ (m);

M_{\oplus} – один из двух фокусов эллипса, в котором расположен центр масс Земли;

\vec{r} – геоцентрический радиус-вектор ИСЗ;

P – *перицентр* – точка орбиты, ближайшая к центру масс Земли;

A – *апоцентр* – точка орбиты, наиболее удалённая от центра масс Земли.

Размер орбиты характеризуется величиной *большой полуоси* эллипса a (отрезок AC и CP). Прямая линия AP , соединяющая апоцентр и перицентр орбиты, называется *линией апсид*. Отношение $e = \frac{CM_{\oplus}}{CP}$, характеризующее форму эллипса, называется *эксцентриситетом* орбиты. Длина отрезка $CM_{\oplus} = e \cdot a$.

Величины большой и малой полуосей связаны соотношением

$$e^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}. \quad (29)$$

Уравнение орбитального эллипса в фокальных полярных координатах (интеграл орбиты) имеет вид:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos v}. \quad (30)$$

Угол v с вершиной в фокусе M , отсчитываемый от направления на перицентр орбиты P до направления на ИСЗ, называется *истинной аномалией*. При $v = 0^\circ$ спутник находится в перицентре, т.е. длина геоцентрического радиуса-вектора ИСЗ имеет минимальную величину. При $v = 180^\circ$ спутник находится в апоцентре, т.е. длина геоцентрического радиуса-вектора достигает максимальной величины. Длина радиуса-вектора ИСЗ при $v = 90^\circ$, $r = a \cdot (1 - e^2) = P$ – *фокальный параметр*.

Согласно второму закону Кеплера, скорость изменения истинной аномалии непостоянна. Вблизи перицентра она больше, чем вблизи апоцентра. С другой стороны, по третьему закону Кеплера период обращения ИСЗ по орбите (T) не зависит от формы эллипса и полностью определяется величиной большой полуоси, т.е. размером орбиты. Неравномерно изменяющуюся величину v неудобно использовать для расчёта положения ИСЗ на орбите в произвольные моменты времени. Поэтому вводят *среднюю аномалию* M , которая изменяется строго пропорционально со скоростью

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad (31)$$

т.е.

$$M = n \cdot (t - \tau).$$

Угол M с вершиной в центре эллипса C отсчитывается от направления на перицентр орбиты P .

Средняя угловая скорость движения ИСЗ по орбите n называется *средним движением*, а величина τ – *моментом прохождения ИСЗ через перицентр*.

Для установления удобной взаимосвязи аномалий M и v вводят ещё одну аномалию – *эксцентрическую* E . Эта вспомогательная угловая величина

вводится с помощью следующего геометрического построения (рис. 3). В плоскости орбиты из центра эллипса опишем окружность радиуса a . Данная окружность касается орбитального эллипса в точках апогея А и перигея П, т.е. линия апсид – диаметр этой окружности. Проведём перпендикуляр к линии апсид через положение ИСЗ m до пересечения с окружностью в точке m' . Соединим полученную точку m' с центром эллипса. Угол E с вершиной в центре эллипса C отсчитывается от направления на перицентр орбиты П до направления на точку m' .

Средняя и эксцентрическая аномалии связаны через *уравнение Кеплера* (кинематический интеграл)

$$M = E - e \cdot \sin E. \quad (32)$$

Соотношение между эксцентрической и истинной аномалиями имеет вид:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (33)$$

Три аномалии изменяются в пределах от 0 до 360° с разными угловыми скоростями, но всегда равны в перицентре $v = E = M = 0$ и в апоцентре $v = E = M = 180^\circ$.

Положение орбиты в пространстве характеризуется тремя углами Эйлера, которые определяют её ориентацию относительно геоцентрической инерциальной системы координат (рис. 4).

Линия $\vartheta \vartheta'$ пересечения плоскости орбиты с плоскостью небесного экватора называется *линией узлов*. Узел (одна из двух точек пересечения орбиты с плоскостью экватора), который ИСЗ проходит, переходя из южной полушеры в северную, называется *восходящим узлом* орбиты ϑ , а другой узел – *нисходящим* ϑ' .

Угол между положительным направлением оси x на точку весны Υ и направлением на восходящий узел ϑ – *долгота восходящего узла* ϑ .

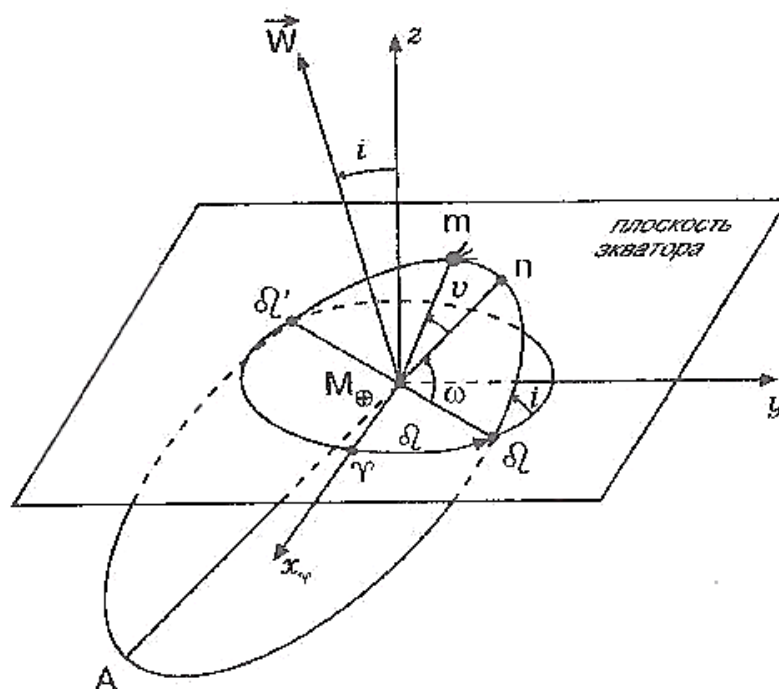


Рис. 4. Элементы орбиты, характеризующие её положение в пространстве

Угол между плоскостью экватора и плоскостью орбиты ИСЗ – наклон орбиты i .

Угол между направлением на восходящий узел Ω и направлением на перигеицентр Π – *аргумент перигеицентра* ω . Он задаёт ориентацию эллипса в плоскости орбиты.

В расчётах используется также *аргумент широты* – угол между направлением на Ω и направлением на ИСЗ.

$$u = \omega + v \quad (34)$$

Таким образом, невозмущённое движение ИСЗ полностью описывается шестью параметрами – *элементами орбиты* $a, e, i, \Omega, \omega, \tau$. Вместо τ положение ИСЗ на орбите часто задаётся значением M_0 в некоторый начальный момент t_0

$$M_0 = n \cdot (t_0 - \tau). \quad (35)$$

2.2 Определение невозмущённой эфемериды ИСЗ

Под эфемеридой понимается таблица значений видимых координат небесного тела на заданные моменты времени. Исходные данные для вычисления эфемериды ИСЗ:

- 1) элементы орбиты $\Omega, I, \omega, a, e, \tau$;

2) координаты X_P, Y_P, Z_P некоторого пункта на земной поверхности в геоцентрической инерциальной системе;

3) момент времени $t \equiv \text{UT1}$ в системе всемирного времени.

Требуется: для данного пункта на заданный момент времени вычислить топоцентрическое прямое восхождение α' , топоцентрическое склонение δ' и топоцентрический радиус-вектор r' ИСЗ.

На практике необходимо, чтобы в вычисленных координатах ИСЗ были учтены возмущения.

Поэтому:

1) для системы элементов орбиты обычно указывается эпоха $t_0 \equiv \text{UT1}^{(0)}$, к которой они отнесены;

2) по формулам теории возмущений вычисляются величины возмущений в каждом элементе орбиты на интервал времени $t - t_0$;

3) образуется система возмущённых элементов путём прибавления к заданным элементам величин их возмущений.

Одновременно с вычислением эфемериды рассчитывают условия видимости ИСЗ для данного пункта.

Порядок вычисления эфемериды:

1) находим среднюю аномалию M на заданный момент по формуле (31);

2) находим истинную аномалию v по формуле (33), для чего нужно предварительно решить уравнение Кеплера (32) и найти эксцентрическую аномалию E , что выполняется методом приближений. Одновременно с v находим аргумент широты u по формуле (34);

3) вычисляем геоцентрический радиус-вектор ИСЗ по формуле (30);

4) находим геоцентрические прямоугольные координаты ИСЗ x, y, z по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos I) \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos I) \\ z &= r \sin u \sin I \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

Контролем вычислений здесь служит выражение

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (37)$$

5) находим прямоугольные топоцентрические координаты спутника

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - X_P \\ y' &= y - X_P \\ z' &= z - X_P \end{aligned} \right\}. \quad (38)$$

6) наконец, находим топоцентрические экваториальные координаты и радиус-вектор ИСЗ:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{y'}{x'} \\ \operatorname{tg} \delta' &= \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \end{aligned} \right\}. \quad (39)$$

2.3 Определение высоты стационарного спутника Земли

Геостационарные спутники расположены строго над экватором. В связи с этим для описания положения спутника достаточно указать, над каким меридианом он находится. Таким образом, период обращения спутника T равен периоду обращения Земли вокруг своей оси.

Для неподвижного наземного наблюдателя геостационарный спутник как бы висит в одной и той же точке неба, не меняя своего положения в зависимости от времени суток и времени года.

В зависимости от угла нутации I геостационарные спутники делятся на:

- полюсные – $I = 90^\circ$;
- экваториальные – $I = 0^\circ$;
- наклонные – $0^\circ < I < 90^\circ$.

Для определения высоты стационарного спутника используют простую зависимость

$$H_{\text{ИСЗ}} = a - R, \quad (40)$$

где $R = 6378.211$ км;

a – большая полуось орбиты спутника:

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot \mu}{4\pi^2}}; \quad (41)$$

T – период обращения ИСЗ;

μ – геоцентрическая гравитационная постоянная;

$$\mu = 3.986 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2.$$

2.4 Вычисление некоторых параметров орбиты ИСЗ

Для общего описания параметров орбиты ИСЗ перечислим следующие величины (рис. 3):

1) высота апогея H_A , высота перигея H_{Π} ; радиус Земли R ;

2) большая полуось орбиты спутника $a = \frac{H_{\Pi} + H_A}{2} + R$;

3) эксцентриситет орбиты ИСЗ $e = \frac{H_A - H_{\Pi}}{2a}$;

4) фокальный параметр $P = a \cdot (1 - e^2)$;

5) радиус-вектор ИСЗ $r = \frac{P}{1 + e \cdot \cos v} = a \cdot (1 - e \cdot \cos E)$;

6) скорость ИСЗ в перигее $V_{\Pi} = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{(1+e)}{(1-e)}}$;

7) скорость ИСЗ в апогее $V_A = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{(1-e)}{(1+e)}}$;

8) средняя аномалия $M = E - e \cdot \sin E$;

9) период обращения $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$.

Задание

1. Вычислить эфемериды невозмущённого движения ИСЗ.
2. Определить высоту геостационарного спутника Земли.
3. Выполнить расчёты параметров орбиты спутника.

Исходные данные

Значения Ω , I , ω , координаты X_P , Y_P , Z_P берутся из первой части работы.

Для задания 2.2: $a = 7035 \text{ км}$; $e = 0.05$; $T = 3^{\text{h}} 44^{\text{m}} 27.85^{\text{s}}$;

$$t = 17^{\text{h}} 32^{\text{m}} 44.57^{\text{s}} + V^{\text{s}}.$$

Для задания 2.4: $H_A = 1\,069\,300 - 100 \cdot V$ м; $H_B = 252\,550 - 100 \cdot W$ м;
 $v = M^\circ$; $E = N^\circ$.

3 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Геодезические задачи, которые решают с использованием наблюдений искусственных и естественных небесных объектов, подразделяют на *геометрические* и *динамические*. Геометрической задачей является построение пространственных геодезических сетей посредством синхронных и квазисинхронных наблюдений ИСЗ.

3.1 Космические геодезические построения

В зависимости от состава измерений космические геодезические построения можно подразделить на *космическую триангуляцию*, *космическую трилатерацию (трисферация)* и *комбинированные построения*.

Основными элементами космических геодезических построений являются: вектор, соединяющий два пункта наблюдений, вектор, соединяющий пункт наблюдений и спутник, и плоскость синхронизации.

Идея построения космической триангуляции принадлежит финскому геодезисту И. Вайсяля. Суть её заключается в том, что при одновременных фотографических наблюдениях ИСЗ из разных пунктов земной поверхности по известным координатам некоторых из этих пунктов можно вычислить координаты ИСЗ и далее координаты определяемых пунктов.

Возможны три вида элементарных фигур космической триангуляции: пространственные угловые засечки, угловые засечки хорд и пересечение плоскостей синхронизации. Эти фигуры отличаются разным количеством исходных и определяемых пунктов, с которых ведутся синхронные наблюдения.

Пространственная угловая засечка. Для определения координат пункта спутник необходимо наблюдать синхронно с двух исходных и одного определяемого пункта. Необходимо наблюдать спутник в двух положениях или наблюдать два разных спутника (рис. 5).

Направления в точках k_1 , k_2 и j будут пересекаться, что равносильно соблюдению условий компланарности

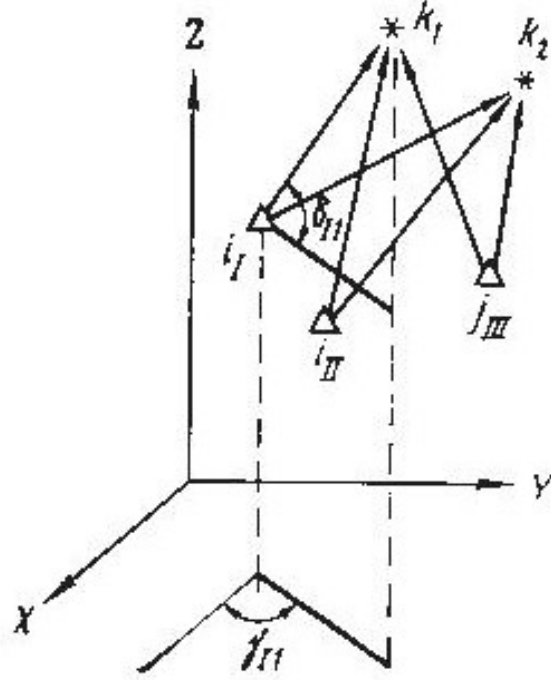


Рис. 5. Пространственно-угловая засечка

$$\left. \begin{aligned} (\bar{r}'_{I.1} \times \bar{r}'_{II.1}) \bar{D}_{I.1I} &= 0 \\ (\bar{r}'_{I.2} \times \bar{r}'_{II.2}) \bar{D}_{I.1I} &= 0 \\ (\bar{r}'_{III.1} \times \bar{r}'_{III.2}) \bar{r}_{1.1} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (42)$$

Для приведённой на рис. 5 элементарной фигуры задача по определению координат пункта j может решаться в следующей последовательности (пункты i_I и i_{II} – исходные).

Для трёх векторов $\bar{r}_{I.1}$; $\bar{r}_{II.1}$; $\bar{D}_{I.1I}$ имеет место соотношение

$$D_{I.1I} + \bar{r}'_{I.1} \times \bar{r}'_{1.1I} = 0. \quad (43)$$

Переходя к проекциям на координатные оси, получаем

$$\left. \begin{aligned} (X_I - X_{II}) + r'_{I.1} \cos \gamma_{I.1} \cos \delta_{I.1} - r'_{II.1} \cos \gamma_{II.1} \cos \delta_{II.1} &= 0 \\ (Y_I - Y_{II}) + r'_{I.1} \sin \gamma_{I.1} \cos \delta_{I.1} - r'_{II.1} \sin \gamma_{II.1} \cos \delta_{II.1} &= 0 \\ (Z_I - Z_{II}) + r'_{I.1} \sin \delta_{I.1} - r'_{II.1} \sin \delta_{II.1} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (44)$$

Далее вычисляют координаты спутника в точке k_1 по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{Y_{II} - Y_I + X_I \operatorname{tg} \gamma_{I \cdot 1} - X_{II} \operatorname{tg} \gamma_{II \cdot 1}}{\operatorname{tg} \gamma_{I \cdot 1} - \operatorname{tg} \gamma_{II \cdot 1}} \\ y_1 &= \frac{X_{II} - X_I + Y_I \operatorname{ctg} \gamma_{I \cdot 1} - Y_{II} \operatorname{ctg} \gamma_{II \cdot 1}}{\operatorname{ctg} \gamma_{I \cdot 1} - \operatorname{ctg} \gamma_{II \cdot 1}} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$z_1 = Z_I + \Delta x_{I \cdot 1} \sec \gamma_{I \cdot 1} \operatorname{tg} \delta_{I \cdot 1} = Z_I + \Delta y_{I \cdot 1} \operatorname{cosec} \gamma_{I \cdot 1} \operatorname{tg} \delta_{I \cdot 1}$$

и контрольные формулы

$$z_1 = Z_{I \cdot 1} + \Delta x_{1 \cdot II} \sec \gamma_{II \cdot 1} \operatorname{tg} \delta_{II \cdot 1} = Z_{II} + \Delta y_{1 \cdot II} \operatorname{cosec} \gamma_{II \cdot 1} \operatorname{tg} \delta_{II \cdot 1}. \quad (46)$$

Также поступают при вычислении координат спутника в положении k_2 . Затем, используя вычисленные координаты k_1 и k_2 , получают координаты пункта наблюдений j .

Задание

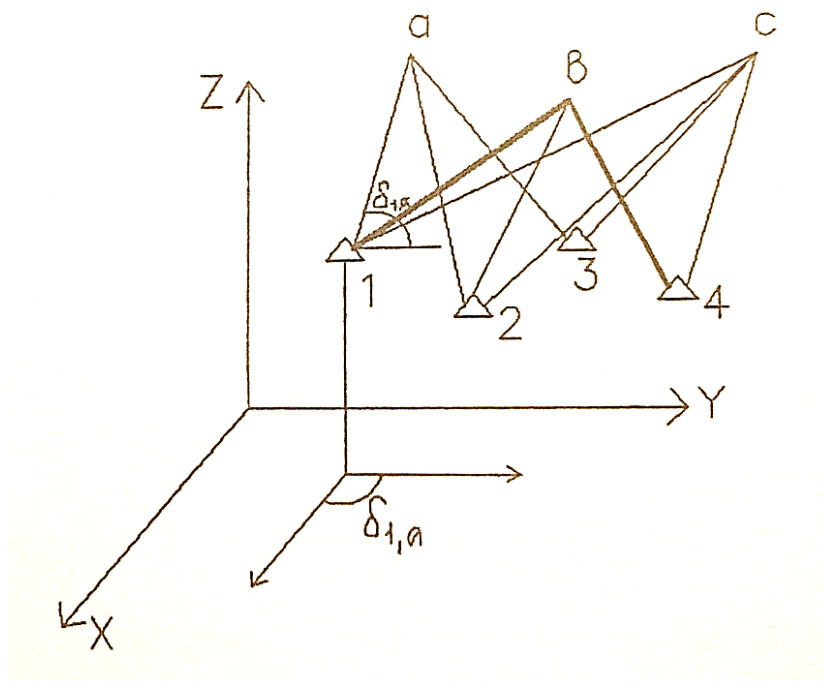


Рис. 6. Данные для задания

Найти (рис. 6): $\gamma_{i,k} = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y_{k,i}}{\Delta x_{k,i}}, \quad \delta_{i,k} = \operatorname{arctg} \frac{\Delta z_{k,i}}{\sqrt{\Delta x_{k,i}^2 + \Delta y_{k,i}^2}},$

где $k = a, b, c; i = 1, 2, 3, 4$.

Обратная задача

Дано: $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3, \gamma_{i,k}, \delta_{i,k}$.

Найти: $x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c, z_a, z_b, z_c, x_4, y_4, z_4$.

Исходные данные

№	Координаты, км		
	x	y	z
1	$6100 - V$	$20 + V$	$0.300 + W \times 0.01$
2	$5500 - V$	$40 + V$	$0.250 + W \times 0.01$
3	$5900 - V$	$70 + V$	$0.200 + W \times 0.01$
4	$5800.004 - V$	$60.004 + V$	$2.150 + W \times 0.01$
a	$6400 - V$	$1200 + V$	$1350 + W$
b	$7300 - V$	$1360 + V$	$1300 + W$
c	$7000 - V$	$1300 + V$	$1330 + W$

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В.В. и др. Космическая геодезия: методы и перспективы развития. – М.: Институт политического и военного анализа, 2002.
2. Луповка В.А., Луповка Т.К. Основы космической геодезии с элементами фотограмметрии. – М.: МИИГАиК, 2002.
3. Краснорылов И.И. Основы космической геодезии. – М.: Недра, 1991.
4. Саврасов Ю.С. Методы определения орбит космических объектов. – М.: Машиностроение, 1981.
5. Урмаев М.С. Орбитальные методы космической геодезии. – М.: Недра, 1981.